

A TERMELÉSI FÜGGVÉNYEK VÁLLALATI ALKALMAZÁSA

DR. PINTÉR JÓZSEF

Az ökonometriai módszerek hazai alkalmazása elsősorban a makroszférában terjedt el. Fontos információt jelent a gazdasági döntések előkészítésének és ellenőrzésének fázisában a gazdasági jelenségek, folyamatok számszerűsítő elemeinek megragadása, az összefüggések természetének jellemzése és előrejelzése. Ennek felismerése a mikrogazdaság szintjén is egyre erőteljesebben kirajzolódik.

A vállalati döntési variánsok kidolgozása évek óta kiemelt helyet kap közgazdasági szakirodalmunkban. Már a hetvenes évek elején felvetődött a matematikai statisztikai módszerek szélesebb körű hasznosításának, felhasználásának gondolata. Az érdemi elterjedést szolgálták egyes eljárások magyar nyelvű összefoglalói (1). Jelentősebb áttörésre azonban csupán a nyolcvanas évek elején figyelhetünk fel. Ekkor láttak napvilágot azok a publikációk, amelyek már konkrét gyakorlati tapasztalatokkal és útmutatásokkal is szolgáltak (15).

Habár az elért eredményekkel, a gyakorlati hasznosulásokkal még korántsem lehetünk elégedettek, egyre inkább érzékelhető a vállalati döntéshozók részéről is az érdeklődés. Ebben a gazdasági problémák jellegének megváltozásán túl jelentős szerepet játszik a számítástechnika valóságos térhódítása. A mikrogazdaság problémáinak tisztázásához azonban még sok nyitott kérdést kell megválaszolni. Ebben a munkában nagy feladat hárul a matematikai statisztikai módszerek alkalmazóira.

Jelen dolgozat az ökonometriai módszerek egyik területének, a termelési függvényeknek vállalati alkalmazásához kíván néhány megjegyzést fűzni. A téma időszzerűségét növeli gazdasági fejlődésünk jelen szakaszának kérdésfeltevése: hogyan lehet hatékonyabban működtetni a vállalati erőforrásokat? Ehhez fontos adalékot szolgáltatnak azok a számszerű összefüggések, amelyek a termelési függvény felírása során napvilágra kerülnek, a függvényen alapuló viszonylag „megbízható” rövid távú prognózisok és a termelési tényezők keresleti függvényei.

A függvény megválasztása

Egy termelési függvény specifikációját nagymértékben befolyásolja a termelést (outputot) meghatározó tényezők köre. Tudjuk, hogy a termelési függvény mint modell sokféle elméleti feltétel¹ megfogalmazása mellett a vizsgált valóságnak csupán néhány lényegesnek ítélt vonását képes megragadni. A modellezés során gyakorta megelégszünk, ha függvényünk matematikailag megalapozott és statisztikailag igazolható. A tényezők közgazdasági analiziséből levonható következteté-

¹ Lásd (4)-ben 173–174. old.

sek végső soron a választott formulában öltenek testet. Az optimális szintet azonban a gyakorlatban csak ritkán érhetjük el, és ilyenkor praktikus megfontolások kapnak elsőbbséget.

Egy sokváltozós modell becslési problémáit nagymértékben leegyszerűsíti, ha a függvényt lineárisnak tételezzük fel, jóllehet tudjuk, hogy ez olyan engedmény, amely elméletileg nem mindig támasztható alá. A változók körének bővítése ugyanis – a változók exponenciális jellege miatt – legtöbbször nem egyszerűsíti, hanem bonyolultabbá teszi a függvény képletét.²

Ez pedig köztudottan becslési nehézségeket okoz.

Kevesebb tényező esetén célszerűnek látszik egy nem lineáris függvény specifikálása. Amennyiben a változók számát leszűkítjük az élőmunkára és az állóeszközökre, kézenfekvő a Cobb–Douglas-féle termelési függvény használata:

$$\hat{Y} = A L^{\alpha} K^{\beta} , \quad /1/$$

ahol:

- Y – a termelés (kibocsátás),
- L – a munkatényező,
- K – az állóeszköz- (tőke) tényező,
- A, α , β , – paraméterek.

A Cobb–Douglas-függvény elterjedését alapvetően befolyásolta viszonylag könnyen kezelhetősége (logaritmizálva lineáris alakra hozható), a segítségével nyerhető pótlólagos információk jellege, valamint az a nem lebecsülendő közgazdasági megfontolás, amely szerint a termelési erőforrások és a termelés közötti összefüggés nem lineáris jellege a bővített újratermelés elméleti hipotézisének is jól megfelel. Mindezek az előnyös tulajdonságok jól kamatoznak egy aggregált gazdasági folyamat vizsgálata során (mezo- vagy makroszinten). Ugyancsak sok érvet sorakoztathatunk fel a függvény használata mellett a mikrogazdaság szintjén is (a vállalat vezetői ugyanis szintetikus információkat nyerhetnek segítségével). A Cobb–Douglas-függvény azonban különösen extenzív fejlődési szakaszban fejezi ki jól a vizsgált jelenséget.

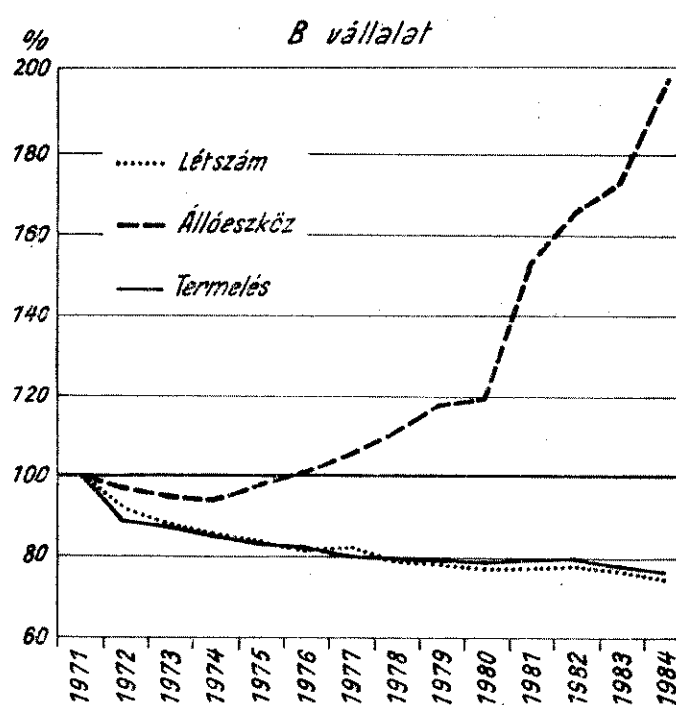
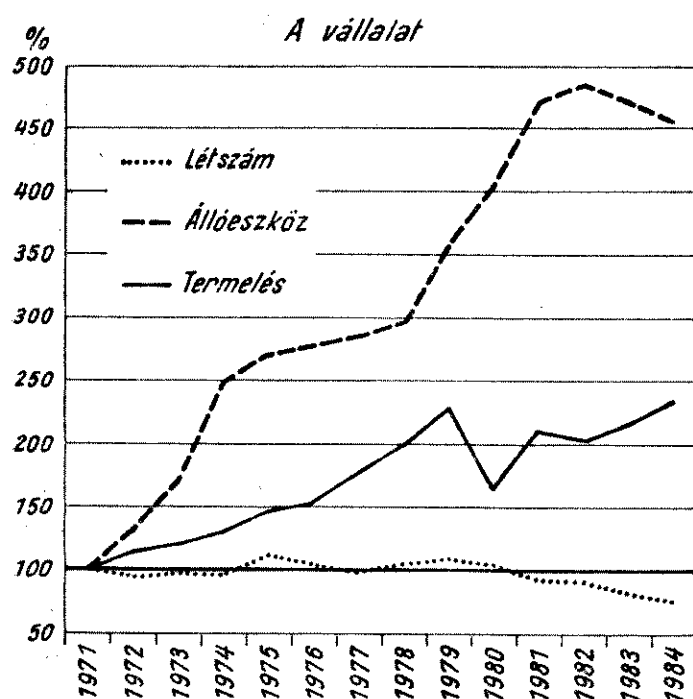
A gazdasági fejlődés intenzív szakaszában – és ez legplasztikusabban a vállalatok adatsoraiból derül ki – a Cobb–Douglas-féle termelési függvény adaptálása különleges problémát idéz elő. A függvény kitevőinek egyike (az α vagy a β rugalmassági együttható) ilyen esetben negatív előjelet vehet fel. Ez természetesen kétségesé teszi felhasználhatóságát, különösen a függvényből nyerhető információk értékelését.

Két erőteljesen különböző típusú vállalat adatbázisa alapján kíséreljük meg szemléltetni az elmondottakat. Az ábra a két vállalat termelési függvényének számításaihoz felhasznált adatok dinamikus viszonyszámait szemlélteti egy tizennégy éves időszakban.

Az A vállalat jelentős állóeszköz-bővítéssel és stagnáló, de végeredményben csökkenő létszámmal valósította meg növekvő ütemű termelését (az 1980-as év törése külső okokkal magyarázható). A B vállalat növekvő állóeszköz-állománnyal, csökkenő létszámmal csökkenő termelést produkált. A tényező- és eredményváltozók dinamikus viszonyszámai utalnak arra, hogy ilyen esetekben a hagyományos Cobb–Douglas-féle függvények ellentmondó értelmezést eredményezhetnek, megnehezítik az értékelést.

² A termelési függvények ilyen értelmű kritikáját is adja Fourastié (5).

A termelési függvények adatai két vállalatnál
(Index: 1971. év = 100,0)



Az A vállalat Cobb–Douglas-féle termelési függvénye:

$$\hat{Y} = 1330 L^{-0,598} K^{0,527}$$

1. tábla

Számítási eredmények

Paraméter	A paraméter		t-statisztika
	értéke	standard hibája	
$\ln \hat{A}$	7,193	3,512	2,048
$\hat{\alpha}$	-0,598	0,446	1,34
$\hat{\beta}$	0,527	0,109	4,83

többszörös determinációs együttható	0,72
globális F-statisztika	14,17
χ^2 -statisztika	0,156
autokorrelációs együttható	0,177
Durbin–Watson-statisztika	1,615

A B vállalat Cobb–Douglas-féle termelési függvénye:

$$\hat{Y} = 0,587 L^{0,913} K^{0,049}$$

2. tábla

Számítási eredmények

Paraméter	A paraméter		t-statisztika
	értéke	standard hibája	
$\ln \hat{A}$	-0,532	1,008	0,528
$\hat{\alpha}$	0,913	0,076	12,01
$\hat{\beta}$	0,049	0,025	1,96

többszörös determinációs együttható	0,9999
χ^2 -statisztika	3,618
autokorrelációs együttható	-0,0317
Durbin-Watson-statisztika	1,836

Mindkét függvény jól illeszkedik az empirikus adatokhoz, a modellt sem az autokorreláció, sem a multikollinearitás jelensége nem zavarja (DW elfogadási tartománya: 1,54–2,46; χ^2 táblabeli értéke: 3,841). Az A vállalat α , valamint a B vállalat β paraméterének értéke azonban nem különbözik szignifikánsan nullától, a modellek felhasználása óvatosságot igényel.

Az A vállalat becsült paraméterének negatív előjele az adatbázist szemléltető ábra alapján nem meglepő, mivel a termelés és a létszám közötti összefüggés negatív. Ez a negatív kapcsolat megmarad a háromváltozós modellben is. Csökkenő volumenű munkatényező esetén majdnem mindig számítanunk kell a munka elasticitásának negatív előjelére, ami egyben azt is jelenti, hogy a Cobb–Douglas-függvénynek – mint közgazdasági modellnek – a pozitív határtermelékenységre vonatkozó feltétele nem áll fenn, ezért létjogosultsága megkérdőjelezhető.

Az ábra alapján a B vállalat adatsorait szemlélve, a termelés- és az állóeszköz-tényező között fedezünk fel negatív irányú sztochasztikus kapcsolatot. Termelési függvényünkben ez a negatív hatás azonban nem jelentkezik, továbbá a paraméter értelmezésére is mód nyílik a szignifikancia-szint megváltoztatása esetén. Jogosan merül fel az a kérdés, hogy milyen hatás idézte elő ezt az előjelváltást.

Mivel a becslést a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével végeztük el, a változók logaritmizálása után ebben az esetben is érvényesek a háromváltozós lineáris regressziós modellre tehető megállapítások. Bebizonyítható,³ hogy a különböző előjelű kétváltozós korrelációs együtthatók abszolút értékét figyelembe véve nem következik be előjelváltás, ha

$$r_{12} < r_{y1} \quad \text{vagy} \quad r_{12} < r_{y2} \quad /2/$$

Ellenkező esetben bekövetkezik az előjelváltás, feltéve, ha fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek is:

$$\frac{r_{y2}-1}{r_{12}} + r_{12} > r_{y1} \quad \text{vagy} \quad \frac{r_{y1}-1}{r_{12}} + r_{12} > r_{y2} \quad /3/$$

A fenti összefüggéseket számszerűsíthetjük, ha behelyettesítjük a vállalatok adatsorainak logaritmusai alapján kiszámított korrelációs együtthatókat:

A vállalat:

$$r_{12} = 0,3403 < r_{y1} = 0,3538$$

$$r_{12} = 0,3403 < r_{y2} = 0,9075$$

B vállalat:

$$r_{12} = 0,718 < r_{y1} = 0,9714$$

de /3/ alapján:

$$(0,9714 - 1) : 0,718 + 0,718 > 0,6075$$

ami jelzi, hogy K változó paramétere a termelési függvényben pozitív értéket vesz fel.

³ A bizonyítást lásd a Függelékben.

A termelési függvények paraméterei B vállalat esetében látszólag használható, értékelhető függvény felírását teszik lehetővé. Az előjelváltás – ami nagymértékben függ a multikollinearitástól – a vizsgálat szempontjából kedvezően alakult. Nem lehetünk azonban mindig ilyen „szerencsések”, amit A vállalat példája is igazol. Ugyancsak itt kell megjegyezni, hogy az idő változójának szerepeltetése sem oldaná fel a problémát A vállalat esetében, mivel – a technikai fejlődést jellemző együtttható természete miatt – $\hat{\beta}$ paraméter venné fel a negatív előjelet.

Szembetűnő a B vállalat függvénye abból a szempontból is, hogy a volumenhozadék (a rugalmassági együttthatók összege) majdnem egységnyi. Ez a felismerés – az előjelváltás tényét ismerve – további kétséget ébreszt a felhasználóban.

A Cobb–Douglas-függvények alapvető logikájuknak megfelelően egységnyi helyettesítési rugalmasságot tételeznek fel. A magyar gazdaság termelőszervezeti egységei – véleményem szerint – sok esetben nem felelnek meg ennek a fontos feltételnek. Megkérdőjelezhető az, hogy a technikai felszereltség 1 százalékos növelése 1 százalékkal növeli-e azt a beruházási költséget, amely egységnyi élőmunkát szabadít fel. Vállalataink technikai fejlettsége inkább azt sugallja, hogy a technikai felszereltség arányának kis változtatásához is relatíve nagyobb (több beruházást igénylő) helyettesítési határárány tartozik. Természetesen óvakodni kell attól, hogy a helyettesítési rugalmasság mutatójából – minden egyéb feltétel nélkül – következtessünk egy adott gazdasági fejlettségi szintre, de a jelenséget átgondolva kevés érv szól amellett, hogy a helyettesítési rugalmasságot egységnyinek tételezzük fel.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy habár sokszor fontos, összetett információt nyújthat a vállalati vezetés számára egy termelési függvény, a klasszikus Cobb–Douglas-függvény alkalmazása sok esetben nehézségekbe ütközik. A negatív kitévő eleve megkérdőjelezi a modell létjogosultságát, de a pozitív rugalmassági együttthatók is további ellenőrzést igényelnek; ugyancsak túlzott leegyszerűsítésnek tűnhet a helyettesítési határárány egységnyi feltételezése is.

A problémák feloldásának igénye elvezet egy széleskörűen ismert, de viszonylag ritkán alkalmazott függvény, a CES (Constant Elasticity of Substitution – állandó helyettesítési rugalmasságú) termelési függvény felhasználásához.

A CES-függvény becslése

A CES termelési függvény már több évtizedes múltra tekint vissza (2). Leírását megtaláljuk mind a makro-, mind a mikroökonometriai kézikönyvekben (4), (7), (8)), és az elmúlt években sem szűnt meg iránta az érdeklődés. Hazai szakirodalmunkban is ismert, alkalmazott és részletesen elemzett modell (10), (11), (13), (14)).

Tekintsük a CES-függvény alapképletét:

$$\hat{Y} = \gamma [\delta L^{-\rho} + (1-\delta) K^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \quad /4/$$

ahol:

$$\gamma > 0; \quad 0 < \delta < 1; \quad \rho \geq -1$$

Y – a termelés (kibocsátás),

L – a munkatényező,

K – az állóeszköz- (tőke-) tényező,

γ – semleges hatékonysági paraméter,

δ – elosztási paraméter (a két termelési tényező részesedését fejezi ki),

ρ – a helyettesítési paraméter.

A helyettesítési rugalmasság:

$$\sigma = \frac{1}{1+\varrho} \quad /5/$$

A /4/ függvényben a volumenelaszticitás, volumenhozadék egységnyi. Természetesen ez a „korlát” is feloldható, és – mivel alapvetően idősorokat használunk fel – a modell dinamizálható:

$$\hat{Y} = \gamma e^{\lambda t} [\delta L^{-\varrho} + (1-\delta) K^{-\varrho}]^{-\frac{h}{\varrho}} \quad /6/$$

ahol:

- h – a volumenhozadék,
- λ – a meg nem testesült műszaki haladás mértéke,
- t – az idő (1... t).

A /6/ függvény a CES termelési függvény általános alakjának tekinthető, amely ugyanakkor rendelkezik azzal a kedvező tulajdonsággal is, hogy egyben a Cobb–Douglas-függvény általánosítása. Bebizonyítható ugyanis, hogy $\sigma = 1$ esetén /6/ egy Cobb–Douglas-típusú termelési függvénynek felel meg.

A CES termelési függvény elméletileg képes arra, hogy sokoldalúan írja le a termelés és a ráfordítás kapcsolatát. Becslése azonban nehéz feladat elé állítja a felhasználót. A /6/ összefüggésből megállapítható, hogy egyidejűleg öt paramétert (γ , λ , δ , ϱ , h) kell becsülni egy nem lineáris modellben.

A CES-függvény megalkotói abból a feltevésből indultak ki,⁴ hogy az élőmunka határtermelékenysége a munkabérrel egyenlő, majd hatványkitevős regressziós függvényt illesztettek az átlagtermelékenység ($\hat{Y}/L$) és a munkabér adatsorára. Ez az összefüggés magában foglal egy termelési függvényt, amelynek kifejezéséhez a megfelelően megválasztott matematikai apparátus segítségével jutottak el. A kutatás során bebizonyították, hogy – állandó volumenhozadék mellett – a munkabér változójának kitevője σ -val, a helyettesítési rugalmassággal egyenlő. A legkisebb négyzetek módszere így lehetőséget teremt σ becslésére, és ezáltal az állandó helyettesítési rugalmasságú (CES) függvény becsülendő paramétereinek száma négyre csökken. E módszer tehát még nem oldja meg a CES becslésének problémáit, de közelebb visz az eredményhez. A további lépésben iteratív technikát lehet a paraméterek becslésére alkalmazni (6). σ értékének meghatározása néhány „szigorú” előfeltételt – például versenyző piacot, a nyereség maximalizálását stb. – igényel, amelynek nehéz megfelelni mezo- és makroszinten is, vállalati szinten pedig ma még nem lehet egzakt és valós kapcsolatot feltételezni a munkabér és a termelékenység között.

A nem lineáris függvény paramétereinek iteratív technikával történő becslése – elsősorban a paraméterek nagy száma és az idősor rövidege miatt – elég sok bizonytalanságot hordoz magában, és még nagy számítógépen is nagyon munkaigényes. A számítástechnikai eszközök jelenlegi összetételét szem előtt tartva, egy egyszerűbb becslési módszer szélesebb körű érdeklődésre tarthat számot. A legkisebb négyzetek módszerét alkalmazhatjuk a paraméterek becslésére, ha bevezetünk ún. magatartási egyenletet.

Induljunk ki az alábbi feltevésekből: általában a vállalat érdekelt nyeresége maximalizálásában.

⁴ Lásd részletesen (2).

Legyen a nyereségfüggvény az alábbi:

$$\pi = p \hat{Y} - rK - wL \quad /7/$$

ahol:

- p – az egységnyi létrehozott kibocsátás ára,
- r – az egységnyi állóeszköz-tényező ára,
- w – az egységnyi munkatényező ára.

A vállalat nyereségének maximális értékét

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$$

feltételek mellett éri el:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p \frac{\partial \hat{Y}}{\partial K} - r$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p \frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} - w$$

$$p \frac{\partial \hat{Y}}{\partial K} - r = 0$$

$$p \frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} - w = 0$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial K} = \frac{r}{p}$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} = \frac{w}{p}$$

/8/

(az állóeszköz-tényező
határtermelékenysége)

(a munkatényező
határtermelékenysége)

A fenti összefüggések természetesen feltételezik a termelési tényezők kompetitív piacát és az egyensúlyi helyzetet.

A /6/ CES termelési függvény elsőrendű parciális deriváltjai segítségével felírhatjuk a munkának az állóeszközre vonatkozó helyettesítési háttarányát:

$$s = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} / \frac{\partial \hat{Y}}{\partial K} = \frac{\delta}{1-\delta} \left(\frac{K}{L} \right)^{1+\epsilon} \quad /9/$$

A nyereségre vonatkozó feltételeket figyelembe véve ugyanakkor /8/ alapján:

$$s = \frac{w}{r} \quad /10/$$

A helyettesítési háttarány fenti /10/ feltételezése megfelel a költségek minimalizálási kritériumának is. Vonjuk össze /9/ és /10/ összefüggéseket:

$$\frac{w}{r} = \frac{\delta}{1-\delta} \left(\frac{K}{L} \right)^{1+\epsilon} \quad /11/$$

Természetesen /11/ átrendezésével kifejezhetjük a technikai felszereltséget:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{1-\delta}{\delta} \cdot \frac{w}{r} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \quad /12/$$

A termelési tényezők árárányai és a technikai felszereltség közötti összefüggés egy adott időintervallumban sztochasztikus. Ezért a /11/ és /12/ egyenleteket reg-

ressziós függvényeknek tekinthetjük. Ez a két összefüggés egyben a változók felcserélését jelenti, azaz ugyanannak a folyamatnak kétféle specifikációja. Jogosan élhetünk azzal a feltételezéssel ((9) szerint), hogy a /11/ összefüggés egy makromegközelítés, míg /12/ mikromegközelítés, ha arra gondolunk, hogy vállalati szinten a tényezők arányai exogének, míg magasabb aggregáltsági szinten inkább a technikai felszereltség tekinthető exogén változónak. A kétféle megközelítés eltérő becslési eredményeket ad, mivel a gyakorlatban nem számíthatunk 1-hez közel álló korrelációs kapcsolatra. A /11/ és /12/ egyenletek paramétereit becsülhetjük a legkisebb négyzetek módszerével. Ennek érdekében logaritmizáljuk mindkét egyenletet:

$$\ln \left(\frac{w}{r} \right) = \ln \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right) + \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{K}{L} \right) + u \quad /13/$$

$$\ln \left(\frac{K}{L} \right) = \sigma \ln \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) + \sigma \ln \left(\frac{w}{r} \right) + u \quad /14/$$

ahol:

u – reziduum,

$$\sigma = \frac{1}{1+\varrho},$$

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} - 1.$$

A fenti két egyenlet magatartási egyenletként szerepelhet abban a sztochasztikus modellben, amely a CES paraméterbecsléséhez vezet. A modell fontos egyenlete a CES-függvény /6/ logaritmizált változata:

$$\ln Y = \ln \gamma + \lambda t - \frac{h}{\varrho} \ln [\delta L^{-\varrho} + (1-\delta) K^{-\varrho}] + u \quad /15/$$

A /14/ és a /15/ egyenlet együttes alkalmazásával egy szimultán egyenletrendszerhez jutottunk, amely a paraméterbecslések mikroszintű megoldásához vezet. A /13/ és a /15/ ugyancsak szimultán egyenletrendszert alkot, a makromegközelítés szellemében.

A kétféle szimultán egyenletrendszer paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével közvetlenül becsülhetők; a magatartási egyenlet együtthatóit felhasználjuk a termelési függvényben:⁵

$$\ln \left(\frac{K}{L} \right) = a_0 + a_1 \ln \left(\frac{w}{r} \right) \quad /16/$$

ahol:

$$a_0 = \hat{\sigma} \ln \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right)$$

$$a_1 = \hat{\sigma} \quad \hat{\delta} = \frac{1}{\frac{a_0}{\hat{\sigma}} + 1} \quad \hat{\varrho} = \frac{1}{\hat{\sigma}} - 1$$

⁵ Így a becsülendő öt paramétert két egyenlet között osztjuk meg.

σ standard hibája: $s_\sigma = s_{a_1}$

ϱ standard hibája: $s_\varrho = \frac{s_{a_1}}{a_1^2}$

δ standard hibája csak közelítő számításokkal fejezhető ki.

$$\ln \hat{Y} = b_0 + b_1 t + b_2 z \quad /17/$$

ahol:

$$z = -\frac{1}{\hat{\varrho}} \ln \left[\hat{\delta} L^{-\hat{\varrho}} + (1 - \hat{\delta}) K^{-\hat{\varrho}} \right]$$

$$b_0 = \ln \hat{\gamma}$$

$$b_1 = \hat{\lambda}$$

$$b_2 = \hat{h}$$

A koeficiensek standard hibái azonosak b_0 , b_1 és b_2 paraméterek standard hibáival.

Természetesen – mint utaltunk rá – magatartási egyenletként /13/ is használható. Ekkor

$$\ln \left(\frac{w}{r} \right) = a_0 + a_1 \ln \left(\frac{K}{L} \right) \quad /18/$$

ahol:

$$a_0 = \ln \frac{\delta}{1 - \delta} \quad a_1 = \frac{1}{\sigma}$$

$$\hat{\delta} = \frac{e^{a_0}}{1 + e^{a_0}} \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{a_1} \quad \hat{\varrho} = a_1 - 1$$

σ standard hibája: $\frac{s_{a_1}}{a_1^2}$

ϱ standard hibája: s_{a_1}

Az adatbázis megválasztása

A termelési függvények meghatározásához szükséges adatbázist sokféle – és sokszor egymásnak is ellentmondó – kritérium alapján állíthatjuk elő. Általában nincs mód arra, hogy valamennyi feltételnek megfeleljünk, ezért óhatatlanul kompromisszumot kell találni. Közös jellemzője a vállalati termelési függvények adatbázisának, hogy a változók idősorok.

A kibocsátás, termelés adatsora lehet például természetes mértékegység (aminek csak homogén termelési profilú vállalatnál van létjogosultsága), bruttó termelési érték, nettó termelési érték, hozzáadott érték stb. Gondot jelent a termelési értékek számítása során alkalmazott árak jellege, ezek torzíthatják a tényleges ki-

⁶ Taylor-sorfejtés alapján.

bocsátás volumenét. Elméletileg ugyancsak jogos igényként merül fel az árváltozások hatásának kiszűrése, változatlan áras adatsorok használata. Ennek a kívánnak azonban nagyon nehéz megfelelni. Általában nem állnak rendelkezésre a vállalatoknál olyan megbízható árindexek, amelyekkel a deflálás probléma nélkül megoldható lenne. Sok esetben ezért folyó áras idősorokkal dolgozhatunk, Ebből a hiányosságból némi „erényt” is kovácsolhatunk, ha arra gondolunk, hogy egy szintetikus termelési függvénnyel a vállalat gazdasági tevékenységét modellezzük, és ebben a tevékenységben külső és belső okok egyaránt jelentőséggel bírnak. Az értékbeni mutatószámok közül egyre fontosabb szerepet tölt be a hozzáadott érték. A gazdaságirányítás jelen rendszerében elfoglalt helye kiemelkedő, és segítségével az elmúlt időszak összehasonlíthatósága is megnyugtatóbb lehet.

Az élőmunka-ráfordítás jó kifejezője a teljesített munkaórák száma. Gyakran meg kell azonban elégedni a teljesített munkanapokkal, illetve a foglalkoztatottak létszámának adataival. Nincs akadálya annak – és ebben az esetben a valóságot is jobban megközelítjük –, ha a termelési függvényben a közvetlen termelésben dolgozók létszámával számolunk.

Elég sok megválaszolatlan kérdést vet fel az állóeszköz-tényező (tőke) statisztikai adatokkal történő számszerűsítése. Általában csak ritkán lehet elszakadni az értékbeni méréstől, amelynek problémái közismertek. Az adott vállalat jellege, az állóeszközök összetétele és a rendelkezésre álló adatbázis ad támpontot ahhoz, hogy bruttó vagy nettó értékben, lehetőség szerint átlagos állománnyal fejezzük ki ezt a nagyon fontos erőforrásfaktort. (Természetesen nem elhanyagolható – különösen jelentős változás esetén – az állóeszköz-állomány által teljesített műszakszám figyelembevétele sem.)

A vázolt problémák mellett a CES-függvény alkalmazása esetén még egyéb nehézséggel is számolni kell. A függvény illesztése ugyanis igényli – alapvetően a tanulmányban vázolt módszer esetén – a munkaerő árának és az állóeszköz árának idősorait is.

A munkaerő „árát” természetesen többféle módon közelíthetjük. Például egy órára vagy egy főre jutó alapbér, reálbér, összes bér vagy összes bérköltség (amely a társadalombiztosítást és az egyéb bérjellegű költségeket is tartalmazza) lehet az az adat, amely a munkatényező árát megközelítően kifejezi.

Nehezebb feladat elé állítja a függvény szerkesztőjét az állóeszköz-tényező árának közelítő meghatározása. Egy működő tőkepiac ilyen esetben fontos információkat szolgáltat, de ennek hiányában be kell érünk azzal, hogy jelentős hibahatárral becsüljük ezt a tényezőt is. Többféle mód kínálkozik az állóeszköz árának meghatározására, de minden esetben számolnunk kell azzal, hogy kiinduló feltevéseink erősen hipotetikus jellegűek. Csupán néhány lehetséges megközelítést sorolunk fel: egységnyi állóeszköz ára eszközlekötési tényezőként (belső kamatlábként) értelmezhető; helyettesíthetjük az árat a kibocsátás (termelés) növekedési ütemével vagy a gépi állóeszköz-állomány bruttó értéken mért záróállományának fix árszintű bázisindexsorával; belső kamatlábat számolhatunk, ha feltesszük, hogy az állóeszközök évente teljesen „elhasználódnak”, és megtérülésük a termelési érték; viszonylag jó elméleti és gyakorlati megközelítés lehet az állóeszközök nettó értékére jutó amortizáció vagy a nettó értékre jutó amortizáció egyéb tiszta jövedelmi elemekkel növelt tömege (ehhez az adathoz juthatunk ha a hozzáadott érték és a teljes munkabérköltség különbségét viszonyítjuk a nettó állóeszközértékhez).

A CES-függvény változóinak említett számos problémája végső soron jelentősen befolyásolja a becsült paraméterek megbízhatóságát, ezért a modell felhasználása során ezeket mindig szem előtt kell tartani. A függvény becsülésének adat-

bázisa azonban előállítható a vállalatok mérlegsoros adataiból, így külön adatgyűjtést nem igényel, egy meglevő adatbázis más irányú felhasználását jelenti csupán.

A CES-függvény becslése konkrét vállalati adatokból

A konkrét empirikus vizsgálatban a változók sokféle kombinációját vettem figyelembe.

A számítási eredmények értékelése során az alábbi „taktikát” választottam: a regressziós modell ellenőrzése varianciaanalízis segítségével; az autokorreláció tesztelése DW-statisztikával; a regressziós paraméterek egyenkénti ellenőrzése t-statisztikával; a multikollinearitás vizsgálata χ^2 -próbával; a heteroszkedaszticitás t-statisztikával történő ellenőrzése. A modellépítés fenti ellenőrzési lépései – megfelelő közgazdasági kontroll mellett – segítették elő a „legelfogadhatóbb” variánsok kiválasztását.

A statisztikai követelményeknek optimálisan megfelelő paraméterbecslések többször igényelték az ún. általánosított legkisebb négyzetek módszerének használatát.

A legfontosabb megállapítások és eredmények A vállalat adatsorai alapján a következők.

A /16/ és a /18/ magatartási egyenletekben az egységnyi állóeszköz árát többféle módon közelítve két változat tűnt reálisnak:

- a) egységnyi nettó állóeszközürtékre jutó amortizáció és egyéb tiszta jövedelem,
- b) az állóeszközök teljes elhasználódását feltételező belső kamat.

Az a változat jobb eredménnyel kecsegtetett, mivel az idősorban az értékek relatív szórása kisebb volt (28 százalék, szemben a b változat 38 százalékos értékével), és ugyanakkor ez elméletileg is elfogadhatóbb megközelítése a problémának. (Külön vizsgálat tárgya lehetne az egy forint nettó állóeszközürtékre jutó amortizáció és tiszta jövedelem, amely az időszakban 0,85 forint és 0,23 forint között szóródott.) Az egyenletek másik változójaként az egy munkásra jutó nettó állóeszközürtéket felhasználva kaptunk statisztikailag jól kezelhető eredményeket. (Az egy főre jutó bruttó állóeszközürték adatsorával illesztett regressziós egyenletek együtthatói nem különböztek szignifikánsan nullától.)

A két magatartási egyenlet paramétereinek becslése jelentős nehézségekbe ütközött, amit alapvetően a változók idősor jellegének tudhatunk be. A trendhatás nem tette lehetővé, hogy a tényezőváltozó specifikus hatását az eredményváltozóra „tisztán” kimutassuk. A mikro- és makromódszerrel becsült paraméterek szélsőségesen ellentmondó értékeket vettek fel. A kapcsolat nem lineáris jellege miatt az időváltozó szerepeltetése nem adott szignifikáns javulást. Mivel mindkét változó idősorát exponenciális trenddel közelíthetjük, amelynek modellje lehet az alábbi:

$$Y_t = a \beta^t v \quad /19/$$

ahol:

- Y_t – az idősor értéke,
- t – az idő (1...n),
- a, β – paraméterek,
- v – zavaró hatást képviselő véletlen változó,

jogosan tételezhetjük fel, hogy a trendhatástól megtisztított idősor $Y_t | \hat{Y}_t$ lehet. A

változók megtisztítása – a fenti módon – az adatelőkészítés fontos fázisa volt. A magatartási egyenlet paramétereinek becslését mind mikro-, mind makromegközelítéssel elvégeztük.

a) Mikromódszer:

$$\ln \left(\frac{K}{L} \right) = -0,0135 + 0,3793 \ln \left(\frac{w}{r} \right)$$

3. tábla

Számítási eredmények			
Paraméter	A paraméter		t-statisztika
	értéke	standard hibája	
α_0	-0,0135	0,0265	0,511
α_1	0,3793	0,093	4,078

determinációs együttható	0,5809
globális F-statisztika	16,634
autokorrelációs együttható	0,0058
Durbin-Watson-statisztika	1,903

A /16/ összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 0,3793 & \text{standard hibája: } 0,093 \\ \hat{\rho} &= 1,636 & \text{standard hibája: } 0,646 \\ \hat{\delta} &= 0,509 \end{aligned}$$

b) Makromódszer:

$$\ln \left(\frac{w}{r} \right) = 0,0207 + 1,5314 \ln \left(\frac{K}{L} \right)$$

4. tábla

Számítási eredmények			
Paraméter	A paraméterek		t-statisztika
	értéke	standard hibája	
α_0	0,0207	0,0535	0,383
α_1	1,5314	0,3755	4,078

determinációs együttható	0,5809
globális F-statisztika	16,634
autokorrelációs együttható	-0,2939
Durbin-Watson-statisztika	2,483

A /18/ összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 0,653 & \text{standard hibája: } 0,16 \\ \hat{\rho} &= 0,53 & \text{standard hibája: } 0,376 \\ \hat{\delta} &= 0,505 \end{aligned}$$

A két függvény illeszkedése az empirikus adatokhoz nem túl erős, az F értékek alapján azonban elfogadhatjuk a modelleket. (Az F -eloszlás táblabeli értéke 5 százalékos szignifikancia-szinten: 4,75.) Az a_0 paraméterek értékei nem különböznek szignifikánsan nullától, ami erőteljesen megkérdőjelezi δ paraméter becslését is. A további számításokhoz – a függvény felírásához – azonban szükségünk van $\hat{\delta}$ nullától eltérő értékére. Praktikus okok arra kényszerítik a modellezőt, hogy elfogadja a δ értékére vonatkozó becslést. Kissé enyhíti a bizonytalanságot $\hat{\delta}$ – mindkét esetben – 0,5 körüli értéke, amely a két termelési tényező megközelítően azonos részesezésére utal.

Az autokorreláció mértéke (elfogadási tartomány: 1,54–2,46) – különösen az ún. mikromódszer esetén – nem jelentős; a modellek homoszkedasztikusak. A helyettesítési rugalmasság (σ) becslése szignifikáns, de a kétféle megközelítésben eltérő. Ez érthető, ha arra gondolunk, hogy itt a változók felcseréléséről van szó. A $\hat{\rho}$ paraméter standard hibája a makromegközelítés esetén jelentősebb. Ennek alapján a mikromódszer paraméterbecslését részesíthetjük előnyben.

Az egyenletrendszer második tagját /17/ használhatjuk fel a további számításokhoz (ahol: $\hat{\rho} = 1,636$ és $\delta = 0,509$):

$$\ln \hat{Y} = 4,0402 + 0,0417t + 0,1897z$$

5. tábla

Paraméter	Számítási eredmények		
	A paraméter		t-statisztika
	értéke	standard hibája	
b_0 . . .	4,0402	0,8974	4,504
b_1 . . .	0,0417	0,0203	2,053
b_2 . . .	0,1897	0,1778	1,067

többszörös determinációs együttható	0,8706
globális F -statisztika	37,005
autokorrelációs együttható	0,137
Durbin–Watson-statisztika	1,763
χ^2 -statisztika	10,287

A függvény eredményváltozója (Y) a hozzáadott érték, míg a z változóban az állóeszközök átlagos állománya és a munkások létszáma szerepel.

A fenti regressziós modell kialakítását szintén több kísérlet előzte meg. A munkások létszáma alapvetően jól írja le a munkatényezőt, a kibocsátás, illetve az állóeszköz-tényező megválasztása azonban már mérlegelést igényelt. A bruttó termelési érték adatsorával végzett illesztések közös vonása az autokorreláció magas szintje (amelyet többszörös iterációval sem lehetett elfogadható mértékűre csökkenteni). A hozzáadott érték alapján végzett számítások ezt a problémát nem jelezték. Az állóeszközök nettó értéke az előző becslés logikájának ugyan jobban megfelelne, az átlagos állóeszköz-állomány segítségével illesztett függvény azonban statisztikailag megbízhatóbb értékekkel rendelkezik.

Az 5. táblában közölt modell alapvetően jól illeszkedik az empirikus adatokhoz. (Az F táblabeli értéke 5 százalékos szignifikancia-szinten: 3,98.) Elhanyagolható az autokorreláció, ugyanis a Durbin–Watson-mutató elfogadási tartománya: 1,75–2,25. Viszonylag erős a modellben a multikollinearitás ($\chi^2_{0,05}$ táblabeli értéke:

3,841), amely alapvetően az idő változó szerepeltetésének tudható be. Az időtényező kikapcsolása azonban statisztikailag elfogadhatatlan modellt eredményezett. A becsült paraméterek közül b_2 csak fenntartásokkal fogadható el, mivel standard hibája jelentős.

A /17/-ben megismert összefüggések és a korábbi eredmények lehetővé teszik a CÉS termelési függvény felírását:

$$\hat{Y} = 56,84 \cdot e^{0,0417t} (0,509L^{-1,636} + 0,491K^{-1,636})^{-\frac{0,1897}{1,636}}$$

amely jól illeszkedik az eredeti adatsorhoz ($R^2 = 0,77$).

A CES-függvény helyettesítési rugalmassága ($\hat{\sigma} = 0,38$) jelentősen eltér a Cobb–Douglas-függvény egységnyi értékétől. Közgazdasági jelentése – habár nem mondható kedvezőnek – jól közelíti a valóságot. Azt mondhatjuk, hogy a technikai felszereltség mintegy 0,38 százalékos változását idézi elő csupán a helyettesítési határárány (egységnyi munkaerő állóeszközzel való helyettesítése) egyszázalékos relatív változása. Az egységnyi munkaerő kiváltása ezért jelentős beruházási költséget igényel. A beruházások elmaradása az elmúlt időszakban ennek a megállapításnak az ellenkezőjét tenné kétségesse.

A meg nem testesült műszaki fejlődés hatása pozitívan hat a termelésre, évente átlagosan 4,26 százalékkal növeli azt.

A vállalatnál folyó munka alacsony hatékonyságára utal a volumenelaszticitás rendkívül alacsony értéke, amely szerint a termelés csupán 0,19 százalékkal nő a termelési tényezők egységnyi relatív növekedése mellett.

A munka és az állóeszköz részesedése megközelítően azonos.

A fenti becslés ún. mikromódszerrel közelítette a termelési függvényt. Makromódszerrel is elvégezve a számításokat a függvény az alábbi:

$$\hat{Y} = 35,02e^{0,0476t} (0,505L^{-0,53} + 0,495K^{-0,53})^{-\frac{0,2537}{0,53}}$$

A fent megfogalmazott tendenciák ebből a függvényből is kiolvashatók, jelentősebb eltérés csupán a helyettesítési rugalmasság esetében tapasztalható, $\hat{\sigma} \equiv 0,65$. A függvény azonban kevésbé jól illeszkedik, mint az előző. Mindkét függvény közös tulajdonsága: elsőrendű parciális deriváltjaik, azaz a határtermelékenységek pozitívak.

Érdekes összehasonlításra ad módot a B vállalat CES termelési függvénye:

$$\hat{Y} = 179,7e^{-0,0233t} (0,504L^{-0,246} + 0,496K^{-0,246})^{-\frac{0,4869}{0,246}}$$

E vállalatnál egy többé-kevésbé jól értelmezhető Cobb–Douglas-függvényt sikerült illeszteni. (Lásd a 2. táblát.) Különösen eltér a két függvényben a volumenelaszticitása; a CES-függvényben szerepel a negatív technikai haladás, és $\hat{\sigma} \equiv 0,802$. A vállalat egyéb adatait is ismerve, meg kell mondani, hogy a CES-függvény következtetései állnak közelebb a valósághoz.

A termelési tényező meghatározása a termelési függvény segítségével

A termelési függvények felhasználása nem merülhet ki csupán a termelés rövid távú előrejelzésében és néhány megállapítás megfogalmazásában. Szerepük egyre jelentősebb lesz a vállalati működést leíró modellekben, de ugyancsak nem

elhanyagolható információt nyújtanak a termelési tényezők adott (keresleti) szintjének meghatározásához. Különösen fontos segédeszközt jelentenek a termelési tényezők rövid távú előrebecslése alkalmával. Fejtegetésünket csupán a termelői létszám rövid távú előrebecslésére korlátozzuk.

A termelői létszám előrejelzése nem nélkülözheti a termelési struktúrát – mint egy tényezőváltozót –, amelyet a termelési függvénnyel lehet leírni.

a) A létszám Cobb–Douglas-függvénnyel történő meghatározása során fejezzük ki /1/ függvényből L változót:

$$L = A^{-1/\alpha} K^{-\beta/\alpha} Y^{1/\alpha} \quad /20/$$

Ily módon meghatározhatjuk egy adott termelési és állóeszközzsint mellett a munkaerő kívánt elméleti értékét (megfelelve az izokvant görbének). Ez az érték azonban még legtöbbször igen távol esik a tényleges létszámtól. Mivel idősorok segítségével számolunk, az elméleti létszámot (L_t^*) a t -edik időszakban a következő módon becsülhetjük (Y_t exogén érték):

$$L_t^* = A^{-1/\alpha} K_t^{-\beta/\alpha} Y_t^{1/\alpha} \quad /21/$$

A becslés (L_t^*) illeszkedését a tényleges adatokhoz egy – a késleltetett modelleknel alkalmazott – dinamikus segédmodell segítségével ellenőrizhetjük:

$$\frac{L_t}{L_{t-1}} = \left(\frac{L_t^*}{L_{t-1}^*} \right)^m \quad (0 < m < 1) \quad /22/$$

Az m paramétert kiegyenlítési koefficiensnek nevezhetjük. Amennyiben a t -edik időszak becsült (elvárt) és tényleges értéke megegyezik, $m = 1$; ha $L_t = L_{t-1}$, a két szomszédos időszak között nincs változás, és $m = 0$. Természetesen m értékét az idősor egészen kell értelmezni, meghatározását a legkisebb négyzetek módszerével adhatjuk:

$$\ln L_t - \ln L_{t-1} = m (\ln L_t^* - \ln L_{t-1}^*) \quad /23/$$

más jelöléssel:

$$\hat{y} = mx \quad m = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

A /21/ és a /22/ összefüggést kombinálva, a t -edik időszak termelési létszámát az alábbi módon becsülhetjük:

$$\ln L_t = (1 - m) \ln L_{t-1} - \frac{m}{\alpha} \ln A - \frac{m\beta}{\alpha} \ln K_t + \frac{m}{\alpha} \ln Y_t \quad /24/$$

Természetesen a fenti egyenlet kibővíthető a technikai haladást is tartalmazó termelési függvény alapján.

b) A létszám CES-függvénnyel is meghatározható. Ebben az esetben is kiindulhatunk az izokvantból:

$$C = \left(\frac{\hat{Y}_t}{\gamma e^{\lambda t}} \right)^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad /25/$$

L_t^* értékeit elvileg meghatározhatjuk a fenti összefüggés segítségével. Gondot jelent azonban – elsősorban a becslés bizonytalansága miatt –, hogy L_t^* értéke a változók kis elmozdulása esetén is ugrásszerűen változhat. Keresni kell ezért egy „stabilabb” módszert, amely ugyanakkor rendelkezik még a termelési függvény „erényeivel”. Önkéntelenül adódik a megoldás, amely az elvart értéket egy adott izokvant aszimptomájától származtatja:

$$L_t^* = \left(\frac{C}{\delta} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad /26/$$

Ezt az összefüggést alakítsuk át, és írjuk fel logaritmikus formában:

$$\ln L_t^* = \frac{1}{h} \ln Y_t - \frac{1}{h} \ln \gamma - \frac{1}{h} \lambda t + \frac{1}{\rho} \ln \delta \quad /27/$$

A /27/ összefüggés már lehetőséget teremt az elméleti értékek meghatározására, és így mód nyílik /23/ szerint m kiegyenlítési koefficiens becslésére, aminek ismeretében felírható a termelői létszám becslőfüggvénye:⁷

$$\ln L_t = (1 - m) \ln L_{t-1} + \frac{m}{h} \ln Y_t - \frac{m}{h} \ln \gamma - \frac{m}{h} \lambda t + \frac{m}{\rho} \ln \delta \quad /28/$$

Az A vállalat CES termelési függvénye segítségével a fenti módon az időszak létszámadatainak interpolatív becslését adtam. A becslések eredménye jól közelíti a létszám valóságos alakulását.

6. tábla

A tényleges és a becsült adat		
Év	Tényleges	Becsült
	létszám (fő)	
1982 . .	1809	1783
1983 . .	1600	1773
1984 . .	1496	1574

*

Végezetül a vizsgálat eredményei az alábbi főbb következtetések megfogalmazását teszik lehetővé.

A termelési függvények segítségével nyerhető információk a vállalati döntések szintjén is egyre inkább polgárjogot nyernek, elősegítik a múlt gazdasági jelenségeinek, folyamatainak mélyebb, egzaktabb megismerését, és lehetővé teszik döntési variációk kialakítását.

A hagyományos Cobb-Douglas-féle termelési függvény gyakorta nem használható. Az adatbázis jellege miatt már sok esetben a modell kiinduló feltételei sem teljesülnek, a függvény egyik kitevője negatívvá válik. Előfordulhat azonban, hogy „kedvező” esetben is kétségesse válik az eredmények értelmezése, mivel a változók páronkénti negatív irányú kapcsolata a többváltozós modellben változik pozitívvá. Ezekre a problémákra a gazdasági fejlődés jelenlegi és jövőbeni szakaszában szá-

⁷ Hasonló eredményre jutott S. Schim van der Loeff és R. Harkema (16), azzal az eltéréssel, hogy a fenti függvényben is szerepelteti a tényezők árát.

mítani kell, mivel a termelés szintentartása és növelése várhatóan csökkenő volumenű munkatényező mellett valósul meg.

Bizonyos megoldást jelenthet az általánosabb alapfeltevéseket igénylő CES termelési függvény használata. A függvény alapján számítható határtermelékenységek – ahogy a kutatás eredményei is igazolták – csak igen szélsőséges esetben válnak negatívvá. A CES-függvény meghatározása azonban sokféle becslési problémát vet fel, elsősorban a becsült paraméterek viszonylag nagy száma miatt. A dolgozatban a becslést két lépésben végeztük el. Sok gondot jelentett az első lépésben a termelési tényezők árainak közelítő meghatározása és a zavaró trendhatástól mentes paraméterbecslés. A számítások során az általánosított legkisebb négyzetek módszerére támaszkodtunk. Az eredmények többirányú statisztikai ellenőrzését folyamatosan elvégezve, a legkisebb bizonytalansággal rendelkező paramétereket fogadtuk el. A két egyenletet felhasználó becslés előnye, hogy kis számítógépek is alkalmazhatók a munka során. A kutatás végül igazolta, hogy lehetséges mikroszintű adattár segítségével is jól illeszkedő CES termelési függvényeket előállítani. Ezek a függvények ugyanakkor helyettesítési rugalmasságokkal is reálisan közelítik a valóságról alkotott közgazdasági feltevéseket.

A CES-függvények birtokában is lehetőség nyílik a létszám, illetve az állóeszköz (tőke) nagyságának olyan rövid távú előrejelzésére, amely jól hasznosítja az elmúlt időszak termelési folyamatának főbb ismérveit.

Természetesen a gazdasági jelenségek exponenciális jellege, valamint a választott függvények sok olyan feltételt igényelnek, amelyek mindegyikének egyidejűleg és maradéktalanul nem lehet megfelelni. A nyitott kérdések megválaszolására a CES-függvény – amely ugyan néhány problémát megold – sem univerzális módszer, előfordulhat, hogy a megoldáshoz más úton lehet csak eljutni. Az alkalmazóktól mindez fokozott óvatosságot és felelősséget igényel, de egy ésszerű kompromisszum mindenképp közelebb visz a közgazdasági környezet jobb megismeréséhez.

FÜGGELÉK

GONDOLATOK A KÉTVALTOZÓS ÉS A PARCIÁLIS REGRESSZIÓS EGYÜTTHATÓK ELŐJELVÁLTÁSÁRÓL

Ismeretes⁸ a parciális és a kétváltozós regressziós együtthatók összefüggése:

$$b_{y1} = b_{y1.2} + b_{21} b_{y2.1} \quad b_{y2} = b_{y2.1} + b_{12} b_{y1.2} \quad /29/$$

Tudjuk, hogy a regressziós együtthatók kifejezhetők a lineáris korrelációs együttható és a megfelelő szórások felhasználásával:

$$b_{y1} = r_{y1} \frac{s_y}{s_1}; \quad b_{y2} = r_{y2} \frac{s_y}{s_2}; \quad b_{12} = r_{12} \frac{s_1}{s_2}; \quad b_{21} = r_{21} \frac{s_2}{s_1}$$

ahol:

s_y, s_1, s_2 – a változók szórásai,

r_{y1}, r_{y2}, r_{12} – a kétváltozós korrelációs együtthatók (tudjuk, hogy $r_{12} = r_{21}$).

A fentiek alapján alakítsuk át /29/ egyenleteket:

$$b_{y1.2} = r_{y1} \frac{s_y}{s_1} - r_{21} \frac{s_2}{s_1} b_{y2.1} \quad b_{y1.2} = \frac{r_{y2}}{r_{12}} \frac{s_y}{s_1} - \frac{1}{r_{12}} \frac{s_2}{s_1} b_{y2.1} \quad /30/$$

⁸ Bizonyítását adja (12) 54–56. old.

$$\text{Legyen } g = \frac{s_y}{s_1} \quad h = \frac{s_2}{s_1} b_{y2.1}$$

A /30/ egyenletek összevonhatók:

$$r_{y1} g - r_{12} h = \frac{r_{y2}}{r_{12}} g - \frac{1}{r_{12}} h \quad /31/$$

Az /31/ összefüggésben fontos szerepet játszanak a lineáris korrelációs együtthatók. Tudjuk azonban, hogy a három korrelációs együttható az alábbi előjeleket veheti fel:

ha r_{y1} és r_{y2} pozitív, akkor r_{12} pozitív;
 ha r_{y1} és r_{y2} negatív, akkor r_{12} pozitív;
 ha r_{y1} vagy r_{y2} negatív, akkor r_{12} negatív.

A /31/-ben betöltött szerepük alapján ezért elvonatkoztathatunk előjelüktől, és – a könnyebb kezelhetőség érdekében – abszolút értékükkel dolgozunk. Tekintsük a g és h értékek abszolút értékét is. Itt csak az utóbbi érdemel magyarázatot, de elfogadhatjuk az abszolút értékét, ha arra gondolunk, hogy csupán az előjelváltás tényét keressük, ezért a kivonandó (például: $r_{12}h$) nagyobb abszolút értéke azt jelzi, hogy $b_{y2.1}$ előjele lesz domináns. Valamennyi paraméter abszolút értékét tekintve vizsgáljuk meg /31/ egyenlőség bal oldalát:

Eset	Relációk	b_{y1} és $b_{y1.2}$ előjele
1.	$r_{y1} \geq r_{12}$ és $g > h$	nem különbözik,
2.	$r_{y1} > r_{12}$ és $g \leq h$	különbözik,
3.	$r_{y1} \leq r_{12}$ és $g > h$	különbözik,
4.	$r_{y1} < r_{12}$ és $g \leq h$	különbözik.

Megjegyzés: mindkét tényezőnél az egyenlőség egyidejűleg nem engedhető meg, mivel ekkor $b_{y1.2} = 0$.

A g és a h egymáshoz viszonyított aránya az 1. és a 4. esetben jelezheti az előjelváltás tényét, de ez még a 2. és a 3. esetben leírtak miatt nem elégséges. A „bizonytalanságot” azonban kiküszöbölhetjük, ha a /31/ egyenlőség jobb oldalát is szemügyre vesszük.

Mivel csupán $\frac{r_{y2}}{r_{12}} < \frac{1}{r_{12}}$ reláció fordulhat elő, $g \leq h$ viszony feltétlen az előjelek különbözőségére utal, és ugyanakkor nem követünk el nagy hibát, ha $g > h$ viszonyt az előjelek azonosságával kapcsoljuk össze. A fentiek alapján g és h értékek hányadosa az előjelek különbözőségét vagy azonosságát számszerűsíti.

A /31/-et átrendezve definiáljuk a hányadost:

$$\frac{g}{h} = \frac{r_{12} - \frac{1}{r_{12}}}{r_{y1} - \frac{r_{y2}}{r_{12}}} \quad /32/$$

amiből átalakítással és mind a számláló, mind a nevező – 1-gyel való beszorzásaival adódik:

$$a_1 = \frac{g}{h} = \frac{1 - r_{12}^2}{r_{y2} - r_{y1} \cdot r_{12}} \quad /33/$$

Vizsgálatunk szempontjából érdektelen a_1 mutató előjele. A fenti gondolatmenet alapján tehát leszögezhetjük, hogy ha

$$\begin{aligned} |a_1| < 1, & \quad b_{y1} \text{ és } b_{y1.2} \text{ előjele különbözik,} \\ |a_1| > 1, & \quad b_{y1} \text{ és } b_{y1.2} \text{ előjele azonos.} \end{aligned}$$

Előfordulhat – ritkán – hogy $|a_1| \equiv 0$, ebben az esetben nem tudjuk előrejelezni a parciális regressziós együttható előjelét. A /33/ összefüggés azonban lehetőséget ad további

átalakításra is, ami feloldja a fenti bizonytalanságot. (Természetesen továbbra is abszolút értékeit használjuk az együttthatóknak.) Legyen $|a_1| > 1$, amiből

$$r_{y1} > r_{12} + \frac{r_{y2} - 1}{r_{12}} \quad /34/$$

A /34/ egyenlőtlenségből világosan kitűnik, hogy ha $|r_{y1}| > |r_{12}|$, a kétváltozós és parciális regressziós együtttható előjele azonos (mivel az egyenlőtlenség jobb oldalának másodig tényezője mindig negatív). $|r_{y1}| < |r_{12}|$ reláció esetén még nem lehetünk biztosak a két együtttható előjelének különbözőségében, de a következő összefüggés itt is végleges választ ad:

$$r_{y1} < r_{12} + \frac{r_{y2} - 1}{r_{12}} \quad /35/$$

Az /34/ és /35/ egyenlőtlenségek élesen felhívják a figyelmet a multikollinearitás szerepére, amely a kétféle paraméter előjel változásának is fontos tényezője.

Hasonló gondolatmenet alapján vezethetjük le az X_2 magyarázó változóhoz kapcsolódó regressziós paraméterek előjelváltását:

$$a_2 = \frac{1 - r_{12}^2}{r_{y1} - r_{y2} \cdot r_{12}} \quad /36/$$

Ha

$$\begin{aligned} |a_2| < 1, & \quad b_{y2} \text{ és } b_{y2.1} \text{ előjele különbözik,} \\ |a_2| > 1, & \quad b_{y2} \text{ és } b_{y2.1} \text{ előjele azonos.} \end{aligned}$$

A két egyenlőtlenség:

– különböző előjelek esetén:

$$r_{y2} < r_{12} + \frac{r_{y1} - 1}{r_{12}} \quad /37/$$

– azonos előjelek esetén:

$$r_{y2} > r_{12} + \frac{r_{y1} - 1}{r_{12}} \quad /38/$$

Természetesen a fenti összefüggések felhasználhatók minden lineárisra visszavezethető regresszió esetén is.

IRODALOM

- (1) Andorka Rudolf: Mikromodellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 1970. 327 old.
- (2) Arrow, K. J. – Chenery, H. B. – Minhas, B. S. – Solow, R. M.: Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*. 1961. 225–250. old.
- (3) Bródy András: Készítés Logaritmiában. *Sigma*. 1984. évi 3. sz. 147–155. old.
- (4) Cédras, J.: Analyse microéconomique. Consommation, production. Dalloz. Paris. 1981. 346 old.
- (5) Fourastié, J.: La fonction de production: Analyse critique. *Journal de la Société de Statistique de Paris*. 1975. évi 1. sz. 51–60. old.
- (6) Harris, R. I. D.: Estimates of inter-regional differences in production in the United Kingdom, 1968–78. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 1984. évi 3. sz. 241–261. old.
- (7) Henderson, J. M. – Quandt, R. E.: Microéconomie. Dunod. Paris. 1972. 408 old.
- (8) Intriligator, M. D.: Econometric models, techniques and applications. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey. 1978. 638 old.
- (9) Kintis, A.: Specification of the elasticity of substitution function within a cost-minimisation CES production function. *Framework. Économie appliquée*. 1976. évi 1. sz. 33–49. old.
- (10) Kristó Zoltán: Termelési függvények a gazdasági elemzésben. Központi Statisztikai Hivatal. Ökonometriai Laboratórium. Ökonometriai Füzetek 16. Budapest. 1979. 145 old.
- (11) Mátyás Antal: A modern polgári közgazdaságtan története. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 1973. 581 old.
- (12) Mundruczó György: Alkalmazott regressziószámítás. Akadémiai Kiadó. Budapest. 1981. 258 old.

(13) Nyáry Zsigmond: A termelési függvények újabb irodalma. Központi Statisztikai Hivatal Könyvtár és Dokumentációs Szolgálat. Budapest. 1972. 62 old.

(14) Pölöskei Pál – Szokolczai György: Az ágazati CES termelési függvény számítások újabb eredményei és egyes módszertani tapasztalatai. *Sigma*. 1972. évi 1. sz. 3–23. old.

(15) Sipos Béla: Termelési függvények – Vállalati prognózisok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 1982. 278 old.

(16) Schim van der Loeff, S. – Harkema, R.: Three models of firm behaviour. Theory and estimation with an application to the Dutch manufacturing sector. *The Review of Economics and Statistics*. 1975. évi 1. sz. 13–21. old.

TARGYSZÓ: Termelési függvény.

РЕЗЮМЕ

Автор после краткого критического обобщения производственной функции Кобба—Дагласа вносит предложение относительно применения производственной функции типа CES. Проблему оценки параметров функции решает с помощью симультанной системы уравнений, содержащей уравнение конкретного поведения. Преимущество метода оценки заключается в его простоте, но характер базы использованных данных оказывает значительные влияния на достоверность прогнозов.

Согласно многим экспериментам конкретные CES уравнения предприятий по существу хорошо включаются в изучаемый экономический процесс, но их недостаток заключается в том, что значимыми являются только их важнейшие параметры. В конечном итоге эмпирические результаты говорят в пользу применения критически оцененных производственных функций типа CES на уровне предприятий. Одновременно распространение применения вычислительной техники предоставляет возможность для широкого использования модели.

В заключительной части очерка автор эскизно излагает один вид применения производственной функции. Конкретно специфицированные производственные функции C—D или CES предоставляют возможность для составления такого сравнительно достоверного, краткосрочного прогноза списочного состава, который решительным образом опирается на структуру производственного процесса.

SUMMARY

Having critically reviewed the Cobb–Douglas-type production function the study proposes the use of the CES-type production function. The problem of estimating the parameters of the function is solved by a simultaneous system of equations including a behavioural equation. The advantage of the estimation technique is in its simplicity, however, the reliability of the estimates is significantly influenced by the nature of the data base applied.

The actual CES functions of enterprises based on several experiments, fit basically well to the investigated economic process, but their drawback is that only their most important parameters are significant. Finally, the empirical results support, last of all, the use of the CES-type production function at enterprise level, if evaluated with necessary criticism. The spread of computing techniques provides the possibility, at the same time, for the extended use of the model.

In the concluding part of the study the author outlines a specific use of the production function. The factually specified C—D or CES-type production function provides the possibility for a relatively reliable forecasting of staff numbers on the short run, relying basically on the structure of the process of production.