

A MUNKABÉREK REGRESSZIÓS ELEMZÉSE ÉS A KONCENTRÁCIÓ VIZSGÁLATA (II.)

HAJDU OTTÓ – KERTÉSZ LÁSZLÓ – SIPOS BÉLA

A munkabérek regressziós elemzése során tanulmányunk első részében (lásd: *Statisztikai Szemle*, 1984. évi 4. sz. 389–396. old.) azt a tanulságot vontuk le, hogy a bérre ható tényezők vizsgálatakor az alapbértarifa besorolási kritériumait is figyelembe kell venni. A továbbiakban a bérek és jövedelmek eloszlásában tapasztalható egyenlőtlenségekről, ezek okairól a koncentrációs elemzések segítségével kívánunk mélyebb összefüggéseket feltárni.

BÉRKONCENTRÁCIÓS VIZSGÁLAT, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A LORENZ-GÖRBE ASZIMMETRIÁJÁNAK ÉRTELMEZÉSÉRE ÉS MÉRÉSÉRE

A bér- és jövedelmi viszonyok elemzésére, a bérek és jövedelmek, valamint a rájuk ható tényezők kapcsolatának vizsgálatára a regresszióanalízis kiválóan alkalmas, de a koncentráció jelenségének speciális problémái miatt a bérek és jövedelmek eloszlásában fellelhető egyenlőtlenségekről, a szóródást kialakító tényezők hatásairól teljesebb képet kaphatunk, ha koncentrációs számításokat is végzünk. Mivel az egyenlőtlenségi mérőszámok skálája igen széles, és mindegyikük más-más aspektusból méri az egyenlőtlenség fokát, ezért az alkalmazásra kerülő mutatók kiválasztása nagy gondosságot igényel a vizsgálati célnak, valamint a mérőszámok tulajdonságainak messzemenő figyelembevételével. E fejezet célja kettős:

- vázlatos képet rajzolni a Pécsi Bőrgyárban kialakult béregyenlőtlenségről,
- majd a Gini-féle koncentrációarány hiányosságának kiküszöbölésére alkalmas mérőszámot szerkeszteni és alkalmazását a vállalat béradatainak felhasználásával bemutatni.

A szakirodalomban használatos folytonos eloszlástípusok közül vizsgálatunkban az eddigiekben leginkább bevált kétparaméteres lognormális, valamint a gyakran vitatott Pareto-eloszlás került alkalmazásra.

A kétparaméteres lognormális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp. \left\{ -\frac{(\lg x - m)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad x > 0$$

eloszlásfüggvénye pedig:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lg x} \exp. \left\{ -\frac{(t - m)^2}{2\sigma^2} \right\} dt \quad x > 0$$

A paraméterek becslése a következő becslőfüggvényekkel történt:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \lg x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \lg^2 x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \hat{m}^2 \quad /1/$$

ahol:

- i – az osztályközök száma ($i = 1, \dots, n$),
 x_i – az i -edik osztályközép,
 f_i – az i -edik osztályközéphez tartozó gyakoriság.

A Pécsi Bőrgyár bérelőszlását az 5. tábla tartalmazza.

5. tábla

A Pécsi Bőrgyár dolgozóinak átlagos havi bérek szerinti eloszlása 1981-ben

Osztályhatár (forint)	Empirikus gyakoriság (fő)	Empirikus relatív gyakoriság (százalék)	Lognormális elosz- lás* által indokolt	
			gyakoriság (fő)	relatív gyakoriság (százalék)
–2500	39	2,67	38	2,56
2501–3000	103	7,05	121	8,25
3001–3500	187	12,80	187	12,89
3501–4000	218	14,92	226	15,48
4001–4500	280	19,16	275	18,72
4501–5000	238	16,29	221	15,14
5001–5500	160	10,95	149	10,16
5501–6000	103	7,05	102	6,95
6001–6500	65	4,45	64	4,37
6501–7000	29	1,98	31	2,15
7001–7500	12	0,82	21	1,44
7501–8000	10	0,68	11	0,79
8001–9000	8	0,56	9	0,65
9001–	9	0,62	6	0,45

* Az /1/ alatti becslőfüggvények értékei rendre: $\hat{m} = 8,3538$ és $\hat{\sigma}^2 = 0,0714$.

Az 5. tábla adataiból leolvasható, hogy a vállalat dolgozóinak átlagos havi bérek szerinti eloszlása rendkívül jól közelíthető a lognormális eloszlással, hiszen az elvégzett χ^2 próba szerint az illeszkedésre vonatkozó hipotézis már 0,450 707 6-os szignifikancia-szinten elfogadható. Ugyanakkor – amint az várható volt – a legkisebb négyzetek módszerével illesztett $\ln y = 57,747 - 6,099 \cdot \ln x$ egyenletű Pareto-egyenest az eloszlás felső szakaszának leírására sem volt alkalmas.⁶

A koncentráció fogalma, megjelenési formái, főbb mutatószámai⁷

A koncentráció fogalmával a múlt század közepétől találkozhatunk a közgazdasági irodalomban. Eredetileg csupán a termeléssel kapcsolatban használták, később azonban a fogalom értelmezési köre kibővült, társadalmi jelenségekre, jövedelem-eloszlási viszonyokra stb. is kiterjesztették használatát.

⁶ Pareto-egyenest egyenletének meghatározását és első hazai alkalmazását lásd: (17) 13–15. old.

⁷ A témáról bővebben lásd: (10), (18).

Általános közgazdasági értelemben akkor beszélünk koncentrációról, ha a gazdasági életben tömörülések, összpontosulások jönnek létre. Marx értelmezésében a koncentráció állapotként, valamint folyamatként is megmutatkozik (12). A koncentrációs számítások szempontjából azonban a szakirodalom abszolút és relatív koncentrációra vonatkozó elhatárolása a legjelentősebb. Kellerr és Schaich (9) német statisztikusok szerint abszolút koncentrációról abban az esetben beszélhetünk, ha az értékösszeg „abszolúte kevés” számú egységre jut, relatív koncentrációról pedig akkor, ha az értékösszeg egyenetlenül oszlik meg a sokaság egységei között, amelyeknek száma figyelmen kívül hagyható.

A koncentráció e kétféle értelmezése természetesen nem két fajta koncentrációt, hanem csupán ugyanazon koncentrációs tartalom kétféle megjelenési formáját jelenti, melyek egyidejűleg is felléphetnek.

Az abszolút és a relatív koncentráció fogalmának elhatárolása után világos, hogy egyenlőtlenségi számításokat csak akkor végezhetünk, ha a vizsgált jelenséggel kapcsolatban el tudjuk dönteni, hogy inkább az abszolút vagy inkább a relatív koncentráció fokát van értelme mérni. Vizsgálatunkban – mivel a bérek koncentrációja tipikusan a relatív koncentráció esetének felel meg – a relatív koncentráció mérőszámai közül fogunk néhányat felhasználni.

A relatív koncentráció mérésére felhasznált mutatók

1. Egyike a leggyakrabban használt, legelterjedtebb koncentrációs mérőszámoknak a Gini-féle koncentrációarány. Kiszámításának módja (10):

$$K = \frac{G}{2\bar{x}} \quad |2/$$

$$G = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \quad |3/$$

ahol:

n – az egyének száma a vizsgált sokaságban,
 x_i – az i -edik egyén bére,
 $\bar{x}$ – a számtani átlag,

és súlyozott formában:

$$G = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i f_j |x_i - x_j| \quad |4/$$

K minimális értéke nyilvánvalóan zérus, s ezt abban az esetben éri el, ha minden egyén bére egyenlő egymással. Ilyenkor nem beszélhetünk koncentrációról. Ha azonban csupán egy emberre jutna az összes kifizetett bér, a többire pedig nem jutna semmi, akkor ezt a $K = 1 - (1/n)$ egyenlőség jelezné. Ez az ún. „teljes” koncentráció lenne.⁸ Látható tehát, hogy fennállnak a $0 \leq K \leq 1 - (1/n)$ egyenlőtlenségek.

2. A koncentráció állapotának szemléltetésére is felhasználható Lorenz-görbe a K mutató mellett a másik legismertebb koncentrációs vizsgálati eszköz (11). Megszerkesztése a következőképpen történik.

⁸ Jövedelem- és béreloszlásokkal kapcsolatban természetesen értelmetlen „teljes” koncentrációról beszélni.

Tekintsük az adott sokaságra vonatkozóan a foglalkoztatottak bérek szerint csoportosított osztályközös gyakorisági sorát. Képezzük először osztályközönként a relatív gyakoriságokat és a relatív értékösszegeket. Abban az esetben nem beszélhetünk koncentrációról, amikor az illető osztályközhez tartozó relatív gyakoriság és relatív értékösszeg egyenlő egymással, vagyis:

$$\frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{x_i f_i}{\sum_{i=1}^n x_i f_i}$$

ahol:

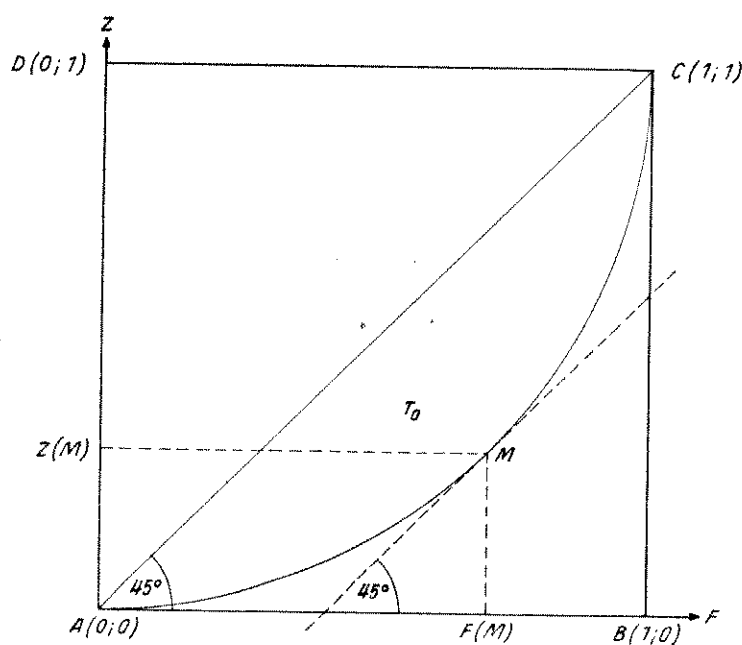
- i – az osztályközök száma,
- f_i – az i -edik osztályközhez tartozó gyakoriság,
- x_i – az i -edik osztályközép.

Ekkor ugyanis az osztályközbe tartozó dolgozók ugyanannyi százalékát képezik az összes dolgozónak, mint az illető osztályközben kifizetett bérek az összes bérnek. Mondhatni: minden osztályköz arányosan részesedik az értékösszegekből. Ezzel szemben az elméleti „teljes” koncentráció esetében egy osztályköz rendelkezne az értékösszeg 100 százalékával, miközben a többi osztályközbe is tartoznának egységek.

Következő lépésként kumuláljuk mind a relatív gyakoriságokat, mind a relatív értékösszegeket.

Koncentrációs vizsgálatról lévén szó, a kumulált relatív gyakoriságok mindig nagyobbak, mint a kumulált relatív értékösszegek. Az ugyanahhoz az osztályközhez tartozó kumulált relatív gyakoriságot és kumulált relatív értékösszeget tekintsük egy síkbeli pont abszcisszájának, illetve ordinátájának, és az így kapott pontokat – természetesen osztályközönként – ábrázoljuk a koordináta-rendszerben. Ekkor a Lorenz-görbéhez jutunk, mely egységnyi oldalú négyzetben helyezhető el.

1. ábra. A Lorenz-görbe



E görbe a koncentráció bármilyen foka mellett az $A(0; 0)$ pontból indul ki, és a $C(1; 1)$ pontban végződik. Mivel koncentráció mentes esetben a páronkénti relatív gyakoriságok és a relatív értékösszegek megegyeznek, természetes, hogy a páronkénti kumulált adatok is egyenlők lesznek egymással. Ezért abszolút egyenlőség

esetén a Lorenz-görbe egybeesik az AC átlóval. Ha a gyakorisági sorban teljes lenne a koncentráció, a görbe az ABC derékszögű háromszög két befogójával egyezne meg. E két szélsőséges állapot között a görbe úgy méri az egyenlőtlenség fokának növekedését, hogy egyre mélyebben húzódik az AC átló alatt.

Lorenz-görbét természetesen nemcsak osztályközös gyakorisági sorból, hanem növekvő sorba rendezett egyedi adatokból is lehet szerkeszteni. Ekkor a kumulált relatív gyakoriságok a következőképpen alakulnak: $1/n, 2/n, \dots, k/n, \dots, 1$.

Az így szerkesztett görbének két előnye is van az osztályközös gyakorisági soron alapulóval szemben:

- elegendően nagy n esetén nagyon sok pontból álló poligont nyerünk a Lorenz-görbére,
- a Lorenz-görbe pontjai nem sűrűsödnek az eloszlás egyik szakaszán sem, hanem egyenletesen helyezkednek el.

Hátránya viszont az, hogy kevés egység esetén nincs értelme eloszlásról beszélni.

Elemzésünkben a későbbiekben ilyen formában szerkesztett görbéről lesz szó.

Az eddig mondottakból következik, hogy abszolút egyenlőség esetén a Lorenz-görbe és az AC által bezárt T_0 terület nagysága zérus, míg ha „teljes” a koncentráció, ugyanezen terület nagysága az ABC derékszögű háromszög területével egyezik meg. Következésképpen: a T_0/T_{ABC} hányados a koncentráció fokának egzakt mérésére alkalmas mutatószám.

A Gini-féle koncentrációarány és a Lorenz-görbe között szoros kapcsolatot létesít a következő összefüggés,⁹ miszerint:

$$K = \frac{T_0}{T_{ABC}} = 2T_0 \quad |5/$$

A görbe nevezetes pontja az átlótól legtávolabb eső ún. átlagpont, ahol a görbe érintője párhuzamos az átlóval. (Lásd az 1. ábrát.) E pont koordinátái megmutatják, hogy a sokaság $F(M)$ százalékának bére kisebb az átlagnál, s ezen egyének az összes bér $Z(M)$ százalékával rendelkeznek, míg $1 - F(M)$ százaléka nagyobb az átlagnál, s ezen egységekhez az értékösszeg $1 - Z(M)$ százaléka tartozik (1).

3. A *redundancia* az entrópia egyenletességi mérőszámából levezetett egyenlőtlenségi mutató, mely az információelméletben terjedt el, és jövedelem- és béregyenlőtlenségek mérésére is alkalmasnak bizonyult (16). Kiszámítása:

$$R = \log n - \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{1}{y_i} = \sum_{i=1}^n y_i \log n \cdot y_i \quad |6/$$

ahol:

- R – az alapsokaságra számított egyenlőtlenségi mérték,
- n – a sokaságban szereplő egyének száma,
- y_i – az i -edik egyén bére az összes bérek százalékában.

A /6/ alatti kifejezés maximális értékét az entrópia

$$\sum_{i=1}^n y_i \log \frac{1}{y_i}$$

minimális, minimális értékét pedig az entrópia maximális értéke mellett venné fel.

⁹ E tétel általánosított formáját a későbbiekben részletesen bizonyítjuk, ezért e speciális eset igazolására itt nem térünk ki.

Az entrópia minimális értéke zérus, s ez a teljes egyenlőtlenség esetében következne be, amikor: $y_i = 1$, ha $i = k$, egyébként $y_i = 0$.

Az entrópia maximális értéke pedig $\log n$, s ekkor $y_i = 1/n$ minden i -re. Ezekből következően: $0 \leq R \leq \log n$.

Ha a számítások során tizes alapú logaritmust használunk, akkor az egyenlőtlenség mértékét „dit”-ekben kapjuk meg.

A redundancia a koncentrációarányával szemben rendelkezik a dezaggregálhatóság előnyös tulajdonságaival. Ugyanis csoportosított sokaság esetén felbontható a csoportok közötti egyenlőtlenségre, valamint a csoporton belüli egyenlőtlenségekre súlyozott számtani átlagának az összegére:

$$R = \sum_{j=1}^m y_j \cdot \log \left(\frac{n}{n_j} y_j \right) + \sum_{j=1}^m y_j R_j \quad |7|$$

ahol:

- j – a csoportok száma ($j = 1, \dots, m$),
- y_j – a j -edik csoport bére az összes bérek százalékában,
- n_j – az egyének száma a j -edik csoportban,
- n – az egyének száma az alapsokaságban,
- R_j – az egyenlőtlenség mértéke a j -edik részsokaságban.

$$R_j = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{y_i}{y_j} \cdot \log \left(n_j \cdot \frac{y_i}{y_j} \right)$$

A fentiekben bemutatott K és R mutatóknak közös tulajdonsága, hogy maximális értékük az elemszámnak a függvénye. A mintaelemszám hatását az egyenlőtlenségben a mérőszámok standardizálása útján vehetjük figyelembe. Képezzük a

$$K' = \frac{n}{n-1} K \quad R' = \frac{R}{\log n}$$

kifejezéseket. Az elvégzett transzformációk után természetesen fennállnak a $0 \leq K' \leq 1$, és a $0 \leq R' \leq 1$ egyenlőtlenségek.

A csoporton belüli koncentráció mérésének eredményei

A csoportosító ismérvek megválasztása apróbb eltérésektől eltekintve a regresszió-számítás magyarázó változóinak figyelembevételével történt. A K és a K' mutatók használatakor a csoportosítás a következő részsokaságokat eredményezte.

Első lépésben a bőrgyári dolgozókat fizikaiakra és nem fizikaiakra, majd a fizikaiakat szakmunkásokra, betanított munkásokra és segédmunkásokra, a nem fizikaiakat pedig vezetőkre, valamint beosztottakra bontottuk.

Második lépésben az így kapott részhalmazokon újabb csoportosítást hajtottunk végre, melynek ismérvei és ismérvváltozatai a következők.

Csoportosítás a második lépcsőben

Ismérv	Ismérvváltozat	Ismérv	Ismérvváltozat
Nem	Férfi	A Pécsi Bőrgyárban	
	Nő	töltött évek száma	
Életkor (év)	–24		– 5
	25–33		6–10
	34–42		11–15
	43–51		16–20
	52–		21–

6. tábla

A legalább két foglalkoztatottat magában foglaló csoportok száma és megoszlása
a csoporton belül mért koncentráció nagysága szerint

Csoport	Szakmunkás		Betanított munkás		Segédmunkás		Fizikai		Vezető		Beosztott		Nem fizikai		Pécsi Bőrgyár	
	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék	f_i	százalék
K mutató szerint																
-0,050	6	6,5	4	4,3	9	15,0	2	2,1	3	7,3	5	8,6	4	5,7	1	1,1
0,051-0,100	64	68,8	40	43,5	22	36,7	36	39,1	21	51,2	24	41,4	16	22,9	20	21,3
0,101-0,150	23	24,7	46	50,0	24	40,0	56	58,8	12	29,3	24	41,4	24	34,3	65	69,1
0,151-0,200	-	-	2	2,2	5	8,3	-	-	1	2,4	5	8,6	18	25,7	8	8,5
0,201-0,250	-	-	-	-	-	-	-	-	4	8,8	-	-	8	11,4	-	-
0,251-0,500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Összesen	93	100,0	92	100,0	60	100,0	94	100,0	41	100,0	58	100,0	70	100,0	94	100,0
K' mutató szerint																
-0,050	3	3,2	3	3,3	3	5,0	1	1,1	2	4,9	3	5,2	4	5,7	1	1,1
0,051-0,100	63	67,7	30	32,6	22	36,7	35	37,2	14	34,1	21	36,2	13	18,6	18	19,1
0,101-0,150	26	28,0	54	58,7	16	26,7	56	59,6	19	46,3	22	37,9	22	31,4	67	71,3
0,151-0,200	-	-	5	5,4	15	25,0	2	2,1	2	4,9	11	19,0	16	22,9	8	8,5
0,201-0,250	1	1,1	-	-	4	6,6	-	-	1	2,4	1	1,7	11	15,7	-	-
0,251-0,500	-	-	-	-	-	-	-	-	3	7,4	-	-	4	5,7	-	-
Összesen	93	100,0	92	100,0	60	100,0	94	100,0	41	100,0	58	100,0	70	100,0	94	100,0

A vizsgálatot nemcsak az átfedésmentes részsokaságokra, hanem az egyes ismérvváltozatok egy, illetve két irányú összegezésével nyerhető valamennyi részhalmozatra elvégeztük. Számításaink eredményeit a 6. tábla közli.

A vállalat foglalkoztatottaiból a lényeges ismérvek alapján képezhető csoportokban a koncentráció foka rendkívül alacsony. A legjellemzőbb koncentrációs sáv a K és a K' mutató tekintetében is a 0,051-től a 0,150-ig terjedő, ami aligha nevezhető jelentős koncentrációnak. A relatív koncentrációt vizsgálva, 0,201 és 0,250 közé eső koncentrációs nagysággal rendelkező csoportokat csupán a vezetők és a nem fizikaiak (második lépcső) csoportosítása során találtunk. Ilyen például a 43–51 éves vezető nők, a 6–10 éve a Bőrgyárban dolgozó 43–51 éves vezető nők, a 16–20 éve a Bőrgyárban dolgozó 34–42 éves nem fizikaiak és az összes nem fizikaiak csoportja.

Az abszolút és a relatív koncentráció együttes vizsgálatakor a K' szerint csoportosított részsokaságok megoszlásai csak kevésbé térnek el a K szerint csoportosítottakétól, s az eltérések inkább az eloszlások alsó és felső szakaszán jelentkeznek. Ennek oka nyilvánvalóan az, hogy az $n/(n-1)$ szorzó értéke nagy n -ek esetén alig különbözik 1-től, s így $K' \approx K$, míg például $n=2$ esetén $K'=2K$. Így K' számítása során a kicsiny számosságú csoportok csökkentik az alacsony koncentrációjú, és növelik a viszonylag magasabb koncentrációjú csoportok számát. Esetünkben hét csoportot is a 0,251–0,500 sávba tudunk sorolni, míg K szerint egyet sem.

Egy kevésbé „finom” csoportosításra vonatkozóan K , K' , R és R' konkrét értékeit a 7. tábla tartalmazza.

7. tábla

A csoporton belüli egyenlőtlenségi értékek a Pécsi Bőrgyárban

Muta- tó szám	Fizikaiak:				Nem fizikaiak:			Összes dolgozó
	szak- munkások	betanított munkások	segéd- munkások	összesen	vezetők	beosztot- tak	összesen	
Férfiak								
K . .	0,0894	0,1197	0,1238	0,1029	0,0934	0,1311	0,1299	0,1179
K' . .	0,0897	0,1203	0,1334	0,1031	0,0947	0,1353	0,1312	0,1180
R . .	0,0055	0,0099	0,0112	0,0074	0,0061	0,0132	0,0116	0,0099
R' . .	0,0021	0,0043	0,0076	0,0026	0,0032	0,0087	0,0058	0,0034
n (fő) .	398	187	29	614	71	32	103	717
Nők								
K . .	0,0971	0,0911	0,0842	0,1051	0,1724	0,1280	0,1673	0,1180
K' . .	0,0976	0,0914	0,0862	0,1053	0,1881	0,1291	0,1686	0,1182
R . .	0,0064	0,0057	0,0047	0,0074	0,0215	0,0113	0,0224	0,0100
R' . .	0,0027	0,0022	0,0028	0,0026	0,0199	0,0055	0,0106	0,0035
n (fő) .	222	339	43	534	12	116	128	732
Együtt								
K . .	0,1049	0,1298	0,1456	0,1276	0,1089	0,1627	0,2207	0,1470
K' . .	0,1050	0,1301	0,1476	0,1277	0,1103	0,1638	0,2217	0,1471
R . .	0,0076	0,0120	0,0146	0,0111	0,0084	0,0193	0,0327	0,0151
R' . .	0,0027	0,0044	0,0078	0,0036	0,0043	0,0088	0,0138	0,0048
n (fő) .	620	526	72	1218	83	148	231	1449

Megjegyzés: Az R értékek mértékegysége a „dit”.

Bár a K és az R , valamint a K' és az R' között értékekben jelentős eltérések vannak, a négy mutató a koncentráció mértékének különbözőségére egyformán reagál,

továbbá mind a négy mérőszám alátámasztja a meglehetősen alacsony fokú koncentrációra tett előző megállapításunkat. Érdekes azonban az, hogy míg a K , K' és R szerint az összes nem fizikai dolgozó, addig R' szerint a női vezetők esetében a legmagasabb a koncentráció foka. A legkisebb mértékű egyenlőtlenséget pedig a K , a K' és az R mutató a női segéd munkások körében, az R' pedig a férfi szakmunkások körében jelzi.

Viszonylag magasabb koncentráltságot a női vezetők, az összes beosztott, a nem fizikai nők, a férfi beosztottak, az összes segéd munkás, valamint az összes nem fizikai dolgozó körében találunk. Megfigyelhető továbbá, hogy – a vezetők kivételével – minden egyes csoportosításban az egész részhalmazra számított egyenlőtlenség mértéke nagyobb, mint a részhalmazon belül külön a férfiak és külön a nők esetében.

Összességében kijelenthetjük: a minden figyelembe vett ismerv szerint képzett átfedésmentes csoportokban az alacsony fokú koncentráció formailag pozitív jelenség (például a 11–15 éve a Pécsi Bőrgyárban dolgozó 25–33 éves segéd munkás nők körében $K = 0,0427$), hiszen ez a csoportosító ismerv helyes megválasztását, az ismérvek alapján a bérek szempontjából homogénnek képzelt csoport ténylegesen is meglevő homogenitását jelzi. Más a helyzet azonban a kevés ismerv felhasználásával képzett csoportok tekintetében. Vegyük példaként a legszélsőségesebb esetet, amikor a vállalat dolgozóit egyáltalán nem csoportosítjuk. Ekkor a Pécsi Bőrgyár összes foglalkoztatottjára számított bérkoncentrációs mutató alacsony értéke ($K = 0,1470$) a bér differenciálásnak nem kielégítő igénybe vételére utal.

Egyenlőtlenség a csoportok között

Az eddigiek során elsősorban a részsokaságokon belüli koncentrációra fordítottuk figyelmünket, de nem lehet közömbös a halmazok között mért egyenlőtlenségek elemzése sem. A redundancia /7/ alatti felbontása lehetőséget nyújt az egyenlőtlenség struktúrájának vizsgálatára is. A csoportok közötti egyenlőtlenségekre irányuló számításokat elvégeztük a Pécsi Bőrgyár dolgozóinak egészére vonatkozó, továbbá a fizikai, illetve nem fizikai állományra vonatkozó 7. tábla szerinti csoportosítások alapján is. Az eredményeket a 8., a 9. és a 10. tábla közli.

8. tábla

Az egyenlőtlenség struktúrája a Pécsi Bőrgyár összes foglalkoztatottjára vonatkozóan

A csoportosítás sorszáma és ismérvei	A létrejött csoportok száma	A csoportok közötti	Az átlagos csoporton belüli	Az összes
		egyenlőtlenség hozzájárulása az alapsokasági redundanciához (százalék)		
1. A 7. tábla összes ismérve	10	52,6325	47,3675	100
2. Tevékenységi főcsoport és nem	4	41,1589	58,8411	100
3. Tevékenységi főcsoport	2	1,9600	98,0400	100
4. Nem	2	34,2384	65,7616	100
5. Életkor	5	4,2146	95,7854	100
6. A vállalatnál töltött évek száma	5	9,8813	90,1187	100

9. tábla

**Az egyenlőtlenség struktúrája a Pécsi Bőrgyár
fizikai dolgozóira vonatkozóan**

A csoportosítás sorszáma és ismérvei	A létrejött csoportok száma	A csoportok közötti	Az átlagos csoporton belüli	Az összes
		egyenlőtlenség hozzájárulása az alapsokasági redundanciához (százalék)		
1. Nem és szakképzett- ség	6	40,7373	59,2627	100
2. Szakképzettség . .	3	12,3600	87,6400	100
3. Nem	2	33,3455	66,6545	100
4. Életkor	5	1,0541	98,9459	100
5. A vállalatnál töltött évek száma	5	7,6073	92,3927	100

10. tábla

**Az egyenlőtlenség struktúrája a Pécsi Bőrgyár
nem fizikai dolgozóira vonatkozóan**

A csoportosítás sorszáma és ismérvei	A létrejött csoportok száma	A csoportok közötti	Az átlagos csoporton belüli	Az összes
		egyenlőtlenség hozzájárulása az alapsokasági redundanciához (százalék)		
1. Az irányításban be- töltött szerep és a nem	4	51,8647	48,1353	100
2. Az irányításban be- töltött szerep	2	57,8046	42,1954	100
3. Nem	2	11,2793	88,7207	100
4. Életkor	5	32,8975	67,1025	100
5. A vállalatnál töltött évek száma	5	22,0998	77,9002	100

E tábláknak nem az a célja, hogy az egyes ismérveket rangsorolja az ismérvváltozataik között fennálló egyenlőtlenségek tekintetében, hisz ezt a feladatot a regresszió-számítás kellő részletességgel elvégezte, hanem az, hogy az ismérvek közötti egyenlőtlenségek alapsokasági egyenlőtlenséghez való hozzájárulását számszerűsítse.

Érdekes például, hogy bár a regresszióanalízis szerint a nemek közti egyenlőtlenség a nem fizikai dolgozóknál magasabbnak bizonyult, mint a fizikaiaknál, a redundanciához való hozzájárulást tekintve viszont a fizikai dolgozók esetében háromszor nagyobb százalékos értéket kaptunk, mint a nem fizikai dolgozóknál. Ez természetesen nem mond ellent a regressziós vizsgálat eredményeinek, pusztán arról van szó, hogy kisebb mértékű csoportok közötti egyenlőtlenség magyarázhatja az alapsokasági egyenlőtlenség nagyobb mértékét, ha az alapsokaságra számított redundancia relatíve kicsiny, és fordítva. A 10. tábla például arról tájékoztat, hogy a nem fizikai dolgozókra számított egyenlőtlenség kialakításában – valamilyen csoportosítást elvégezve – a csoportok közötti vagy az átlagos csoporton belüli egyenlőtlenségnek van nagyobb súlya. Látható, hogy a halmazok közötti egyenlőtlenségnek csak a 8. tábla 1., valamint a 10. tábla 1. és 2. csoportosításában van 50 száza-

léknál nagyobb magyarázó ereje, ahol a csoportosító ismérvek rendre: a 7. tábla minden ismérve, az irányításban betöltött szerep és a nem, továbbá az irányításban betöltött szerep. Az életkor és a Pécsi Bőrgyárban töltött évek száma sem az összes, sem a fizikai dolgozókra nézve nem releváns a vizsgálat szempontjából, ugyanakkor a nem fizikai dolgozók esetében magyarázó erejük jóval nagyobb.

A Lorenz-görbe aszimmetriájának értelmezése és mérése

Eddigi vizsgálatunkban a Lorenz-görbét mint szemléltető eszközt nem, a Lorenz-féle területarányt azonban – mely a Gini-koefficienssel egyenlő – közvetve felhasználtuk. A vizsgált probléma érzékeltetése érdekében tekintsük újra a 6. tábla K mutatóra vonatkozó osztályközös gyakorisági sorait. E gyakorisági sorokból 274 olyan különböző csoportot tudunk összeszámolni, amelyekben a koncentráció foka 0,100 és 0,150 közé esik. Nyilvánvaló, hogy e 274 koncentrációs érték gyakorlatilag alig különbözik egymástól, ugyanakkor az sem vitatható, hogy ezek a csoportok különböznek az elemszám, az eloszlás s ebből következően a hozzájuk tartozó Lorenz-görbék alakjának tekintetében is.

A K mutató tehát egymástól teljesen eltérő eloszlások esetén is adhat ugyanakkora értéket. Ezen a ponton pedig elérkeztünk a Gini-koefficiens leglényegesebb fogatékosságához, mellyel a szakirodalomban már számos szerző foglalkozott.

A probléma megoldásában figyelemre méltó eredményt ért el *H. Kahnwald* (5) az általa kidolgozott „dinamikus” koncentrációs mérőszám révén. A mutatószám hiányossága viszont, hogy egy Lorenz-görbe alakjának a vizsgálatára nem, összehasonlításban pedig csak két időszak, terület stb. Lorenz-görbéinek az összehasonlítására alkalmas.

A legkézenfekvőbb megoldás természetesen az lenne, hogy minden egyes kiszámított K érték mellett ábrázoljuk a hozzá tartozó görbét is. Ez azonban sokszor – mint jelen vizsgálat esetén is – lehetetlen, méghozzá a bemutatandó görbék meglehetősen nagy száma miatt.

A Lorenz-görbe aszimmetriájának értelmezése

Gondolatmenetünk kiindulópontja az azonos nagyságú koncentrációs területaránnal rendelkező görbék közötti különbségtétel során az, hogy e görbék a BD átlóra szimmetrikusak-e. A 2. ábrán aszimmetrikus görbék láthatók.

Mivel a Lorenz-görbe értelmezési tartományán végig konvex,¹⁰ ezért a görbének csak egy átlagpontja lehet, amely szimmetrikus görbe esetén megegyezik a görbe és a BD átló metszéspontjával. Könnyen belátható, hogy ha az átlagpont nem az átlóra esik, akkor a Lorenz-görbe aszimmetrikus. Attól függően, hogy az átlagpont a BD átló alatt vagy felett helyezkedik el, fogjuk a Lorenz-görbét alulról, illetve felülről aszimmetrikusnak nevezni.

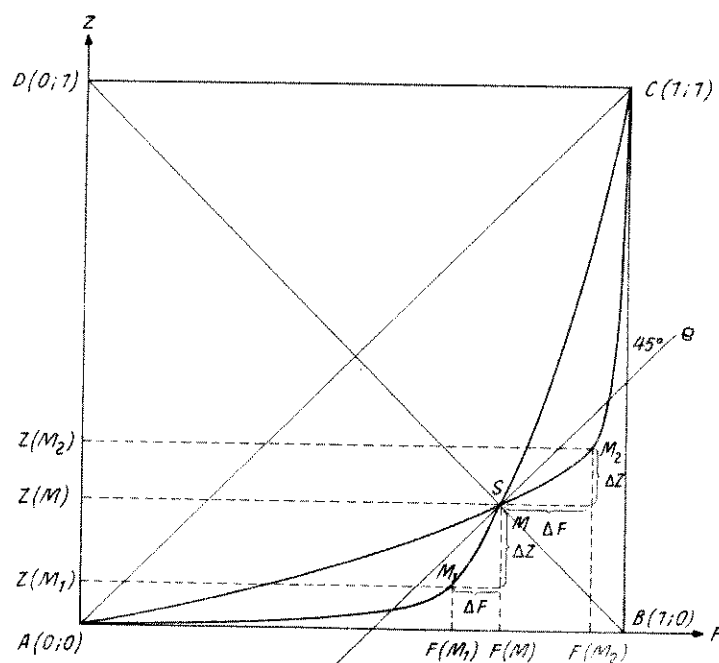
Nézzük a 2. ábra alapján, hogy milyen többletinformációt jelent számunkra a görbe szimmetrikus, illetve aszimmetrikus voltának ismerete.

Egy adott gyakorisági sorhoz tartozó Lorenz-görbe és az átló metszéspontjának koordinátái – $S(x; y)$ – a görbe ábrázolása nélkül is kiszámíthatók.¹¹

¹⁰ A Lorenz-görbe konvexitási tulajdonsága megszerkesztésének módjából, közgazdasági tartalmából következik, és e tételt a továbbiakban is bizonyítás nélkül a priori kategóriaként kezeljük.

¹¹ A számítás során megkeressük a gyakorisági sorban a BD átlóhoz alulról, illetve felülről legközelebb eső két pontot (melyeket annál a két osztályköznel találunk meg, ahol a páronkénti kumulált relatív értékösszeg és a kumulált relatív gyakoriság összege még nem éri el, és melynél már éppen túllépi az 1-et), s e két ponton átmenő egyenes BD átlóval való metszéspontjának koordinátáit tekintjük x és y becslésének. Ez a becslés annál pontosabb, minél több pontból áll a gyakorisági poligon.

2. ábra. Az aszimmetria létének és irányának értelmezése



Ha görbénk szimmetrikus lenne az átlóra, az S pont koordinátái egybeesnének az átlagpont koordinátaival, vagyis teljesülnének az $x = F(M)$ és $y = Z(M)$ egyenlőségek. Ha azonban a görbe aszimmetrikus voltára derül fény, ez az átlagpont BD átlóról való elmozdulását jelzi, s minthogy a görbének csak egy átlagpontja lehet, ennek a pontnak mind alsó, mind felső aszimmetria esetén az e egyenes B csúcs-pont felőli oldalára kell esnie. (Lásd M_1 , M_2 pontokat.) Ezt figyelembe véve nyilvánvaló, hogy felső aszimmetria esetén a $\Delta Z/\Delta F$ differencia hányados értéke kisebb, alsó aszimmetria esetén pedig nagyobb, mint 1. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent ez a képzeletbeli szimmetria esetéhez viszonyítva.

Különböztessünk meg két esetet!

a) Felülről aszimmetrikus görbét tételezve fel:

$$F(M_2) > F(M) \quad Z(M_2) > Z(M) \quad \frac{\Delta Z}{\Delta F} < 1$$

Az átlagpont jelentését felhasználva ez úgy értelmezhető, hogy mind az átlagosnál kisebb bérrel rendelkezők aránya, mind ezen egyének összes béréből való részesedése nagyobb, mint ha a görbe szimmetrikus lenne, csak éppen a béréből való részesedés kisebb mértékben növekedett, mint az átlagosnál kevesebbet keresőknek a sokaságban elfoglalt aránya.

b) Alulról aszimmetrikus görbét tekintve:

$$F(M_1) < F(M) \quad Z(M_1) < Z(M) \quad \frac{\Delta Z}{\Delta F} > 1$$

Ez pedig azt jelenti, hogy mind az átlagosnál kisebb bérrel rendelkezők aránya, mind ezen egyének összes béréből való részesedése kisebb, mint szimmetrikus görbe esetén, de az összes béréből való részesedés nagyobb mértékben csökkent, mint az átlagosnál kevesebbet keresők aránya.

Ezek után nyilvánvaló, hogy aszimmetria esetén – a koncentrációt egy újabb aspektusból szemlélve – az egyenlőtlenség növekedéséről beszélhetünk a szimmetria helyzetéhez képest, hiszen az átlagnál kevesebbet keresők aránya vagy nagyobb mértékben nő, vagy kisebb mértékben csökken, mint a csoport összes béréből való ré-

szesedése. Az egyenlőtlenség említett növekedése természetesen változatlan koncentrációarány mellett történik, és viszonyítási alapja a szimmetrikus görbe átlagpontja, melynek koordinátái maguk is bizonyos egyenlőtlenséget jeleznek. Ugyanakkor nem mindegy, hogy az egyenlőtlenség növekedése alsó vagy felső aszimmetria révén következik be. Felső aszimmetria esetén ugyanis az átlagosnál kisebb bérel rendelkezők aránya jóval magasabb, mint alsó aszimmetriát feltételezve, és ez a jelenség is az egyenlőtlenség újabb megjelenési formája.

Az aszimmetria irányának jelentősége tehát abban áll, hogy az egyenlőtlenség növekedése mellett az átlagosnál kisebb értékkel rendelkező egységek aránya relatíve kisebb vagy relatíve nagyobb lesz-e. Bérelosztást tekintve természetesen az alsó aszimmetria esete kedvezőbb, mint a felső.

Ezek után kijelenthetjük, hogy számottevő aszimmetriát észlelve elengedhetetlen a Frigyes Ervin által kidolgozott $\langle 4 \rangle$ ún. v mutatószám-rendszer igénybevétele, mely kiválóan alkalmas az átlagosnál kisebb és az átlagosnál nagyobb jövedelmek, bérek stb. összehasonlítására.

A Lorenz-görbe aszimmetriájának mérése¹²

Az aszimmetriát mérő mutatószámmal szembeni elvárásunk, hogy előjele révén tájékoztasson az aszimmetria irányáról, továbbá abszolút értékének határozott felső korlátja az 1 legyen.

A mérőszám levezetéséhez felhasznált segédtelek:

1. a Lorenz-görbe az értelmezési tartományán végig konvex;
2. a Lorenz-görbe akkor és csak akkor szimmetrikus a BD átlóra, ha az átló mindkét oldalán egyenlő nagyságú területeket zár be az AC és BD átlókkal;
3. a Lorenz-görbe akkor van felülről szélsőségesen aszimmetrikus helyzetben, ha a sokaság első x százalékában, és akkor van alulról szélsőségesen aszimmetrikus helyzetben, ha a sokaság utolsó $1 - x$ százalékában az átlagos abszolút különbség értéke zérus (x a görbe átlóval való metszéspontjának abszcisszáját jelenti).

E két utóbbi segédétel igazolására részletesen kitérünk.

A 2. segédétel bizonyítását két lépésben kell elvégezni. Először belátjuk, hogy ha a görbe a BD átló mindkét partján egyenlő nagyságú területeket zár be az átlókkal, akkor a Lorenz-görbe szimmetrikus az átlóra, majd azt, hogy ha a görbe tengelyesen szimmetrikus, akkor az átló két oldalán ugyanakkora nagyságú területeket zár be az átlókkal.

Lássuk a 3. ábrán a bizonyítás első lépését.

Kiinduló feltételeink az állítás igazolásához:

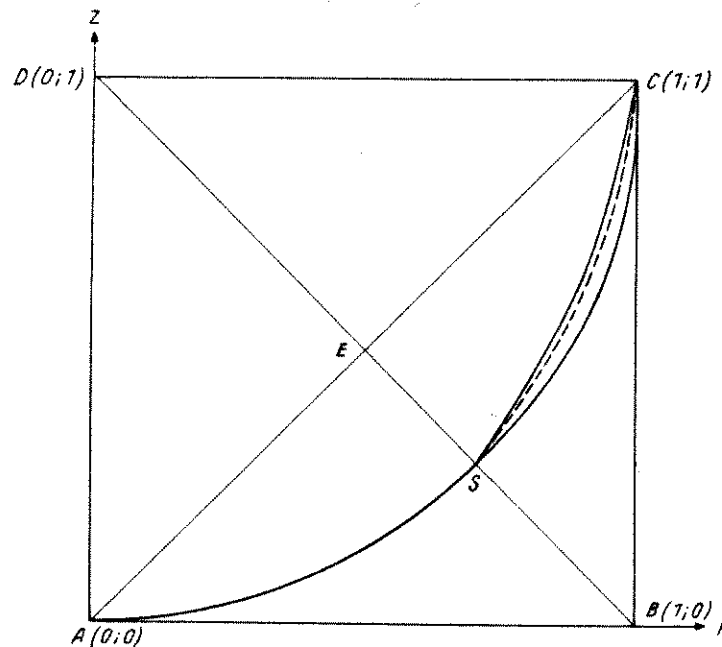
- az ASC ív (Lorenz-görbe) konvex,
- az ASE terület egyenlő az SCE területtel, a Lorenz-görbére vonatkozóan.

Ábrázoljuk a Lorenz-görbét az A pontból kiindulva, de csak az S metszéspontig. Legyen az így kapott ív az AS folyamatos ívszakasz. Ezt a félgörbét tükrözzük a BD tengelyre, s jelölje a tükörkép ívet az SC szaggatott ívszakasz. Nyilvánvaló, hogy a tükrözés után az ASE és az SCE területek egyenlők, hiszen a tükrözésből következően egybevágók. Mivel az előbbieket során a konkrét Lorenz-görbét csak az S pontig ábrázoltuk, most haladjunk tovább a görbével a C pontig. Ezt az SC folyamatos ívszakasz szemlélteti. Ettől kezdve a bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy ez az SC

¹² A gyakorisági eloszlások jellemzésére szolgáló aszimmetria-mutatók nem alkalmasak a Lorenz-görbe aszimmetriájának mérésére, ezért olyan vizsgálati eszközt kell konstruálni, amely kifejezetten e görbéhez kötődik.

Lorenz-görbe ív nem esik egybe a szimmetrikus SC ívvel. Mivel a görbe végig konvex – a Lorenz-görbe természetének ismeretében – ez a folyamatos SC ív vagy végig a szimmetrikus SC ív alatt, vagy végig felette fog húzódni. Ez azonban azt jelentené, hogy a Lorenz-görbe SC íve és a tengelyek által bezárt terület vagy nagyobb vagy kisebb, mint a szimmetrikus SC ív és a tengelyek által bezárt terület, márpedig a kettőnek egyenlőnek kellene lenni egymással a kiinduló feltételek alapján. Így ellentmondásra jutottunk, tehát a tétel első része igazolást nyert.

3. ábra. A második segédétel bizonyítása

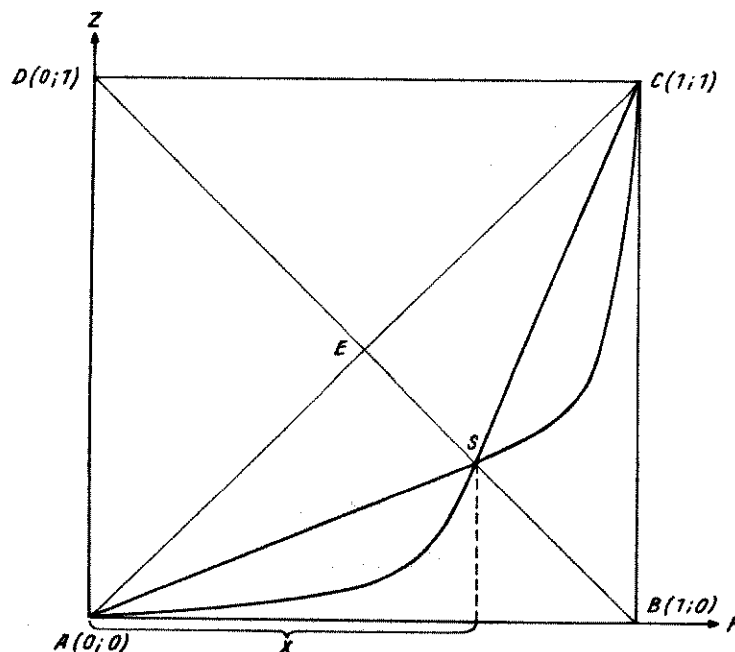


A tétel második állítása evidencia, ezért leírásától eltekintünk.

Ezek után nézzük a 3. segédételt.

A BD átlót ugyanabban a pontban metsző és az AC átlóval $1/2 K$ nagyságú területet bezáró Lorenz-görbék közül az a két görbe van a legszélsőségesebben aszimmetrikus helyzetben, amelyeknek útja az átlóval való metszéspontig az AS szakasz, illetve az a görbe, amelyik a metszéspont után útját az SC szakaszban folytatja. (Lásd a 4. ábrát.)

4. ábra. A szélsőséges aszimmetria helyzete



Ebben a megfogalmazásban az állítás bizonyítása triviális, hiszen például alsó aszimmetria esetén a Lorenz-görbe – konvexitási tulajdonsága miatt – nem vehet fel az SC szakasz AC átló felőli oldalán levő pontokat, mivel ekkor konkáv ív is képződne, ami viszont nem lehetséges.

Ezek után már csak azt kell megmutatni, hogy a szélsőséges aszimmetria két-féle definíciója ekvivalens egymással.

Legyen h a legkisebb, k pedig a legnagyobb előforduló bér, g_1 és g_2 pedig két tetszőleges bérmagyság, melyekre $h \leq g_1 \leq g_2 \leq k$ teljesül, továbbá tételezzünk fel folytonos béreloszlást. Ekkor a $[g_1; g_2]$ intervallumba eső bérek átlagos abszolút különbsége:

$$G_{[g_1; g_2]} = \frac{\int_{g_1}^{g_2} f(x) \int_{g_1}^x f(t) (x-t) dt dx}{\int_{g_1}^{g_2} f(x) \int_{g_1}^x f(t) dt dx} \quad (g_1 \leq t \leq x \leq g_2) \quad /8/$$

ahol $f(x)$ a béreloszlás sűrűségfüggvénye.

A /8/ alatti kifejezés átalakítása érdekében vezessük be a következő jelöléseket, és tekintsük a felhasználásra kerülő azonosságokat.

Jelölje $F(x)$ a kumulált relatív gyakoriságot az x helyen – esetünkben $F(x)$ természetesen nem más, mint a béreloszlás eloszlásfüggvénye –, $Z(x)$ a kumulált relatív értékösszegeket az x helyen, m pedig az x nagyságú jövedelmek várható értékét, ahol $h \leq x \leq k$.

Nyilvánvaló, hogy

$$\int_h^x f(x) dx = F(x)$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$\int_h^x f(t) t dt = m Z(x)$$

A fenti jelölések, azonosságok, valamint a Newton–Leibniz-formula és egy speciális integrálási szabály¹³ felhasználásával – meglehetősen hosszadalmas átalakítások után – /8/ a következő alakra hozható:

$$\frac{2m}{[F(g_2) - F(g_1)]^2} \left\{ \int_{Z(g_1)}^{Z(g_2)} F(Z) dZ - \int_{F(g_1)}^{F(g_2)} Z(F) dF - F(g_1)[Z(g_2) - Z(g_1)] + Z(g_1)[F(g_2) - F(g_1)] \right\}$$

Vizsgáljuk meg e két határozott integrál különbségét. Tekintsük az 5. ábrát.

A határozott integrál geometriai jelentéséből következően a kapcsos zárójelen belüli első integrál a vízszintesen vonalkázott területtel, míg a második integrál a függőlegesen vonalkázott területtel egyenlő.

Az ábráról leolvasható, hogy

$$\int_{Z(g_1)}^{Z(g_2)} F(Z) dZ - \int_{F(g_1)}^{F(g_2)} Z(F) dF = F(g_1)[Z(g_2) - Z(g_1)] - Z(g_1)[F(g_2) - F(g_1)] + 2w$$

ahol w a Lorenz-görbe és a P_1P_3 húr által határolt terület mérőszáma.

¹³ Lásd: (14) 140. old.

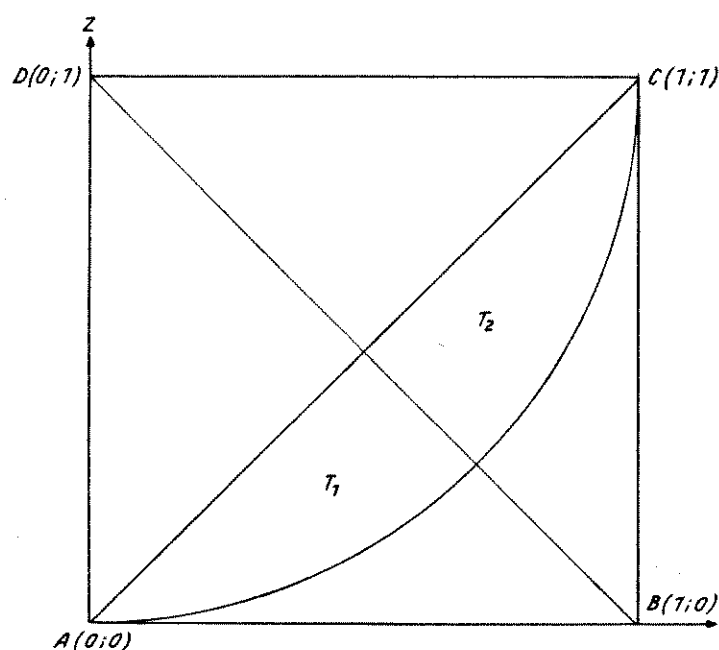
Adjuk össze a két egyenletet:

$$T_1 = \frac{1}{4} K + \frac{1}{2} t_0$$

majd vonjuk ki egymásból őket:

$$T_2 = \frac{1}{4} K - \frac{1}{2} t_0$$

6. ábra. Az aszimmetria irányának megállapítása



A T_1 és a T_2 területekre kapott megoldásokból kitűnik, hogy ha a Lorenz-görbe szimmetrikus az átlóra, akkor

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{4} K$$

A megoldásból az is leolvasható, hogy aszimmetria esetén amennyivel kisebb a BD átló egyik oldalán elhelyezkedő területrészt a képzeletbeli szimmetriát jelző $1/4 K$ nagyságú területnél, az átló másik oldalán levő terület ugyanannyival nagyobb $1/4 K$ területegységnél. Legyen $1/2 t_0 = t_1$, ami a szimmetriához képest való területcsökkenést jelenti. Így $T_1 - T_2 = t_0 = 2t_1$, vagyis t_0 maximális és minimális értékének meghatározásához elegendő t_1 maximális és minimális értékének a megállapítása. Ezt pedig a szélsőséges aszimmetria szemléletes definíciója teszi lehetővé, amelyből következik, hogy az S ponton átmenő és az AC átlóval $1/2K$ nagyságú területet bezáró Lorenz-görbék aszimmetriája csak annyira növekedhet, hogy a területcsökkenés során a BD átló valamelyik oldalán legalább akkora terület maradjon, mint az ASE derékszögű háromszög területe.

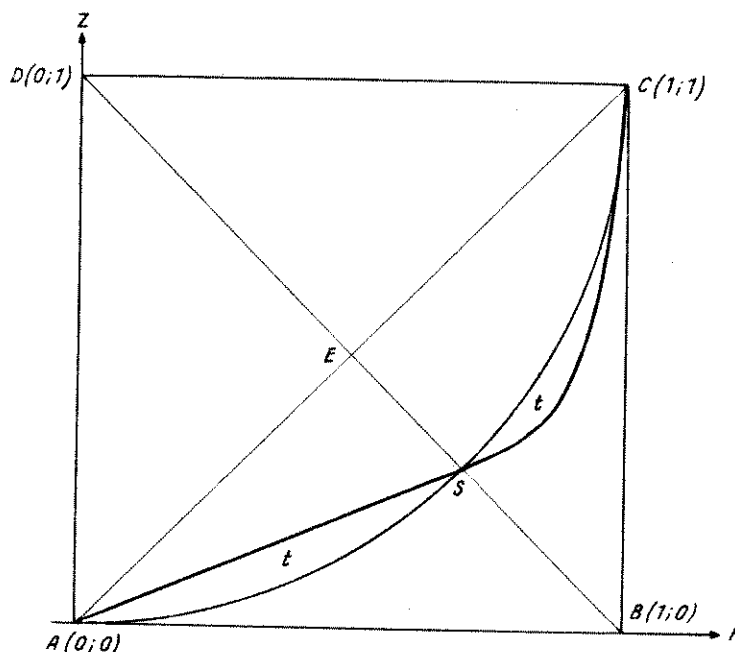
Ennek figyelembevételével már ki tudjuk számítani a görbék halmazához tartozó s a szimmetria esetéhez viszonyított maximális területcsökkenés mértékét:

$$\max. t_1 = \frac{1}{4} K - T_{ASE} = t$$

E t terület nagysága azt fogja jelenteni, hogy annak az S ponton átmenő Lorenz-görbének az esetében, amellyel kapcsolatban kiszámoltuk, a $T_1 - T_2$ különb-

ség maximálisan $2t$, minimálisan $-2t$ lehet, s ekkor a görbe szélsőségesen aszimmetrikus helyzetben lenne valamelyik irányban. (Ezt szemlélteti a felső aszimmetriára vonatkozóan a 7. ábra.)

7. ábra. Maximális területcsökkenés (növekedés) felső aszimmetria esetén



Ezek után különböztessünk meg két esetet:

a) ha a vizsgált görbe felülről aszimmetrikus, akkor szélsőséges helyzetben: $T_1 - T_2 = -2t$, vagyis

$$\frac{T_1 - T_2}{2t} = -1$$

b) ha pedig a vizsgált görbe alulról aszimmetrikus, akkor szélsőséges helyzetben: $T_1 - T_2 = 2t$, amiből

$$\frac{T_1 - T_2}{2t} = 1$$

Látható tehát, hogy a $(T_1 - T_2):2t$ képlet abszolút értékének határozott felső korlátja az 1, amit a szélsőséges aszimmetria helyzetében vesz fel a mutató, míg szimmetrikus görbék esetén értéke zérus.

A mérőszám algoritmizálásának során a következő főbb lépéseket kell végigjárni:

1. meghatározzuk a gyakorisági sorhoz tartozó Lorenz-görbe és a BD átló metszéspontjának koordinátáit;
2. kiszámítjuk az adott görbére vonatkozó konkrét $T_1 - T_2$ értéket, s a számításhoz a poligon alatti területet használjuk fel;
3. képezzük a gyakorisági sor alapján a $t = 1/4 K - T_{ASE}$ különbséget;
4. végül az így kapott eredményeket behelyettesítjük a $(T_1 - T_2):2t$ képletbe.

Néhány megjegyzés a levezetett mutatóval kapcsolatban:

- a fentiekben levezetett mutató – a Lorenz-görbék ábrázolása nélkül is – alkalmas a görbék jellemzésére, valamint összehasonlítására is, tekintet nélkül a görbék számára;
- a mérőszám által jelzett információ annál megbízhatóbb, minél több pontból áll a gyakorisági poligon;

– a szélsőséges aszimmetria helyzetét nem szabad összetéveszteni a nagyon kevés pontból álló görbe esetével, ahol esetleg az origót követő első pont rögtön a BD átlóra vagy fölé esik, s így a poligon és az átló által bezárt T_1 terület éppen T_{ASE} -vel egyenlő;

– a 3. segédtétel alapján látható, hogy a szélsőséges aszimmetria állapota egy elméleti szélső helyzet, amelyben a görbe akkor lenne, ha a sokaság első x vagy utolsó $1 - x$ százaléklékában az átlagos abszolút különbség értéke s ebből következően a koncentráció (K) nagysága is zérus lenne, ami irreális elvárás; ezért az aszimmetria fokát – gyakorlatilag – már 0,200-tól szignifikánsnak s 0,400-tól erősnek tekintjük.

Aszimmetria-értékek a Pécsi Bőrgyárban

A vizsgálatot – számos különböző csoportot képezve – az egyedi bérek alapján szerkesztett Lorenz-görbékre vonatkozóan végeztük el az előzőekben már vázolt előnyök miatt.

A csoportosítás több lépcsőben a következő – az alábbi sémán bemutatott – részhalmazokat eredményezte:

1. LÉPCSŐ

2. LÉPCSŐ

3. LÉPCSŐ

4. LÉPCSŐ

A Pécsi Bőrgyár
összes dolgozója

Fizikaiak

Szakmunkások

Betanított munkások

Segéd munkások

Nem fizikaiak

Vezetők

Pénzügyi–számviteli
munkakörben dolgozók

Egészségügyi, kulturális
munkakörben dolgozók

Igazgatási munkakörben
dolgozók

Műszaki munkakörben
dolgozók

Beosztottak

Pénzügyi–számviteli
munkakörben dolgozók

Egészségügyi, kulturális
munkakörben dolgozók

Igazgatási munkakörben
dolgozók

Műszaki munkakörben
dolgozók

Pénzügyi–számviteli
munkakörben dolgozók

Egészségügyi, kulturális
munkakörben dolgozók

Igazgatási munkakörben
dolgozók

Műszaki munkakörben
dolgozók

Majd az ezek után fellelhető 20 különböző sokaságon belül újabb csoportosítást hajtottunk végre a nem, a vállalatnál töltött évek száma és az életkor alapján.

11. tábla

Aszimmetria-értékek a dolgozók körében

A Pécsi Bőrgyárban töltött évek száma	Életkor (év)					Összesen
	-24	25-33	34-42	43-51	52-	
Férfiak (fizikai)						
- 5	0,1556	-0,1593	0,1319	0,0402	0,1645	0,0778
6-10	0,0920	-0,1203	0,0454	-0,3247	0,2765	-0,1464
11-15	-	-0,2010	0,3916	0,4509	0,0171	0,1134
16-20	-	0,5096	0,1645	0,2260	-0,1046	0,1726
21-	-	-	-0,1931	0,1517	0,0397	0,1027
Összesen	0,2458	-0,0494	0,1808	0,1008	0,0780	0,1196
Nők (fizikai)						
- 5	0,6319	0,2899	0,3330	0,4880	0,7367	0,3880
6-10	0,6582	0,1153	0,1423	0,1926	0,0642	0,1932
11-15	-	0,1511	0,4086	0,3120	0,2858	0,3288
16-20	-	-	0,2638	0,1831	-0,0290	0,1928
21-	-	-	0,1233	0,0459	-0,4056	-0,0379
Összesen	0,5219	0,1866	0,2969	0,2197	0,1958	0,2448
Fizikaiak együtt						
- 5	0,0795	0,0729	-0,0141	0,2308	0,0005	0,0936
6-10	0,2321	0,0464	-0,2235	-0,0654	0,2938	-0,0298
11-15	-	0,1945	0,3124	0,1009	0,1911	0,1778
16-20	-	0,5096	0,3183	0,4293	0,0444	0,3324
21-	-	-	0,1779	0,1914	0,0872	0,1537
Összesen	0,1311	0,1189	0,0733	0,1213	0,1442	0,1201
Férfiak (nem fizikai)						
- 5	-	0,0505	-	-	-	0,2335
6-10	-	-0,1169	0,0647	-	-	0,0789
11-15	-	-0,2563	-0,1006	-	-	-0,1206
16-20	-	-	-0,6525	-0,5263	-	-0,1892
21-	-	-	-0,3930	-0,3537	0,2100	-0,2271
Összesen	-	-0,1446	-0,1428	-0,4040	0,2188	0,0985
Nők (nem fizikai)						
- 5	-0,1670	0,0639	0,0647	-	-	-0,1211
6-10	-	-0,3280	-0,4752	-0,6608	-	-0,6338
11-15	-	-0,5162	0,7419	0,6857	-	-0,5726
16-20	-	-	-0,6108	-	-	-0,5743
21-	-	-	0,4401	-0,0754	0,4207	-0,1115
Összesen	-0,1670	-0,3075	-0,4581	-0,4334	0,1672	-0,2461
Nem fizikaiak együtt						
- 5	-0,3904	-0,0688	-0,0127	-	-	-0,1464
6-10	-	-0,6633	0,1158	-0,5417	-	-0,2633
11-15	-	-0,1620	0,1975	0,6857	-	-0,1292
16-20	-	-	-0,2227	0,1347	-	-0,1047
21-	-	-	-0,5047	0,1823	0,3769	0,2256
Összesen	-0,3904	-0,2829	0,0367	0,1101	0,4203	0,0891

12. tábla

Adott nagyságú aszimmetriával rendelkező csoportok előfordulása

Aszimmetria- érték	Csoportok, amelyeknél a Lorenz-görbe pontjainak száma*																												
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	4– 20	21– 30	31– 40	41– 50	51– 50	61– 70	71– 80	81– 90	91– 100	101–	21–	
0,000–0,100	1	–	–	3	1	–	–	–	–	5	3	3	2	2	1	4	2	1	41	13	7	5	5	5	7	3	2	16	63
0,101–0,200	–	8	–	–	1	–	–	–	–	4	2	2	2	2	1	1	1	40	12	10	8	2	5	5	1	4	4	24	70
0,201–0,300	3	–	4	4	–	–	–	–	–	3	3	2	2	1	–	2	2	39	9	6	7	3	2	2	1	2	9	42	
0,301–0,400	2	8	3	1	1	–	–	–	–	2	2	3	2	–	–	–	–	32	7	1	1	1	2	2	2	2	6	22	
0,401–0,500	6	3	3	1	1	–	–	–	–	3	2	–	1	1	–	–	–	28	3	2	2	–	2	1	–	–	–	11	
0,501–0,600	3	2	3	1	1	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	15	1	1	–	–	–	–	–	–	–	2	
0,601–0,700	4	8	2	1	1	–	–	–	–	–	1	–	1	–	3	–	–	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
0,701–0,800	3	4	2	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
0,801–0,900	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
0,901–1,000	1	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
0,000–0,100	6	6	2	3	4	–	7	3	2	2	2	1	2	2	2	3	–	51	8	7	1	2	3	3	3	2	20	49	
–0,101–0,200	2	6	–	6	4	–	3	–	4	4	2	1	–	1	–	4	4	39	9	9	5	4	4	4	3	–	6	40	
–0,201–0,300	4	4	4	6	–	–	4	1	1	4	–	1	1	1	2	2	2	40	5	4	3	2	1	1	–	4	23		
–0,301–0,400	8	6	1	4	5	–	5	4	–	1	2	1	1	2	–	2	2	50	10	8	2	1	1	–	–	–	–	22	
–0,401–0,500	1	1	4	3	2	–	1	–	1	3	1	1	1	–	–	–	–	22	5	1	1	–	–	–	–	–	–	7	
–0,501–0,600	8	3	1	1	5	–	1	2	2	1	–	1	–	–	–	1	–	31	3	–	–	–	–	–	–	–	–	3	
–0,601–0,700	2	1	1	–	2	–	2	3	2	1	–	–	–	–	–	1	1	20	1	1	–	–	–	–	–	–	–	2	
–0,701–0,800	4	2	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
–0,801–0,900	2	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
–0,901–1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	

* A Lorenz-görbe pontjainak száma eggyel több, mint ahány egyén a csoportba tartozik, s egy, illetve két egyén esetén nincs értelme aszimmetriát számítani. Ugyanakkor a pontok száma azért tart 20-ig egyesével, mivel osztályközös gyakorisági sorok esetén az osztályközök száma ritkán lépi túl a 20-at.

Az így létrehozott részsokaságok száma olyan nagy lett, hogy minden csoport aszimmetria-értékét nem tudjuk bemutatni, ezért illusztratív céllal kiragadjuk az összes fizikai, illetve az összes nem fizikai dolgozóra irányuló számítások eredményeit, melyeket a 11. tábla tartalmaz.¹⁵

Már a táblából is kiolvasható, hogy a Lorenz-görbék többnyire nem mondhatók tökéletesen szimmetrikusnak a diagonálist keresztező átlóra, következésképpen mindig van értelme az aszimmetria mértékét és irányát számszerűsíteni.

A mutatószám összehasonlításra való alkalmasságát e táblában található csoportok példája révén igazoljuk.

Az alábbiakban néhány olyan aszimmetria-értéket sorolunk fel, amelyeket 0,100 és 0,150 közé eső – azonosnak tekinthető – koncentráció-aránnyal rendelkező halmozokban számítottunk ki:

-0,6633	-0,1593	0,1645	0,3330
-0,5726	-0,1006	0,1914	0,3769
-0,5047	-0,0654	0,2197	0,3880
-0,4334	-0,0141	0,2256	0,4086
-0,3904	0,0005	0,2831	0,4203
-0,3247	0,0402	0,2899	0,4293
-0,3075	0,0505	0,2938	0,4880
-0,2563	0,0985	0,3124	0,5219
-0,2235	0,1442	0,3288	0,6319
-0,1892	0,1556	0,3324	0,6857

Mivel az összes elképzelhető csoportra számított aszimmetria-érték közlésére terjedelmi okok miatt nem volt lehetőség, ezért kontingencia-táblák segítségével mutatjuk be az aszimmetria mértéke és a Lorenz-görbe pontjainak száma alapján besorolt csoportok gyakoriságainak alakulását. (Lásd a 12. táblát).

Néhány gondolat a kontingencia-táblák kapcsán:

– mivel az aszimmetria-értékek információtartalma annál magasabb, minél több pontból áll a vizsgált poligon, ezért a figyelemre érdemes görbék pontjainak minimális számát szigorúbb esetben 11-ben, kevésbé szigorú esetben pedig – mivel ötödöket még gyakran vizsgálunk – 6-ban állapítottuk meg;

– az összes eset között nagy gyakorisággal fordulnak elő mind pozitív, mind negatív aszimmetria-értékek;

– látható, hogy elég magas a szignifikáns s ezen belül az erős pozitív vagy negatív aszimmetriát mutató görbék száma;

– a $(T_1 - T_2) : 2t$ mérőszám, amelynek levezetését korábban részletesen bemutattuk, viszonylag alacsony koncentrációarányok esetén is – hiszen a Pécsi Bőrgyárban alacsonynak bizonyult a bérek koncentráltóságának a foka – érzékenyen reagál a görbék alakjában mutatkozó különbségekre.

Végezetül a következő táblában felsoroljuk azokat a csoportokat, amelyeknél elegendően sűrű poligont vizsgálva kaptunk egészen magas aszimmetria-értékeket. (Lásd a 13. táblát.)

A kiemelt csoportoknál – az aszimmetria mértékének és irányának értelmezését figyelembe véve – az egyenlőtlenségnek a szimmetria esetéhez viszonyított növekedését észleltük.

¹⁵ A vizsgálatok során csak a legalább két foglalkoztatottat magában foglaló csoportokat vettük figyelembe.

13. tábla

A magas aszimmetria-értékű csoportok

Sor-szám	Csoport	Aszimmetria-érték	A görbe pontjainak száma
1.	25–33 éves, 16–20 éve a vállalatnál dolgozó férfi szakmunkások	0,5528	16
2.	34–42 éves, legfeljebb 5 éve a vállalatnál dolgozó női szakmunkások	0,6826	18
3.	43–51 éves, 16–20 éve a vállalatnál dolgozó női szakmunkások	0,6534	16
4.	43–51 éves, legfeljebb 5 éve a vállalatnál dolgozó női betanított munkások	0,6173	19
5.	34–42 éves, 16–20 éve a vállalatnál dolgozó betanított munkások	0,6059	14
6.	11–15 éve a vállalatnál dolgozó segédmunkások	–0,6248	21
7.	Legfeljebb 24 éves és legfeljebb 5 éve a vállalatnál dolgozó női fizikai munkások	0,6319	18
8.	34–42 éves műszaki vezetők	–0,5175	24
9.	25–33 éves, 6–10 éve a vállalatnál dolgozó beosztottak	–0,6178	19
10.	6–10 éve a vállalatnál pénzügyi–számviteli munkakörben dolgozó nem fizikaiak	–0,5599	22
11.	25–33 éves, 6–10 éve a vállalatnál dolgozó nem fizikaiak	–0,6633	20
12.	6–10 éve a vállalatnál dolgozó női nem fizikaiak	–0,6338	36
13.	11–15 éve a vállalatnál dolgozó női nem fizikaiak	–0,5726	19
14.	25–33 éves, 16–20 éve a vállalatnál dolgozó férfiak	0,6353	18

*

A koncentráció fokának szemléltetésére rendkívül alkalmas Lorenz-görbék – a gyakorisági eloszlástól függően – nem mindig szimmetrikusak a diagonálist keresztező átlóra. Aszimmetriájuk közgazdasági jelentést hordoz, mégpedig az átlagosnál kisebb és az átlagosnál nagyobb értékkel rendelkező egységek közötti egyenlőtlenséget jelzi, s indokolja a további vizsgálatokban a Frigyes Ervin-féle v egyenlőtlenségi mutatószám-rendszer igénybevételét, ami e tanulmányban terjedelmi okok miatt nem történt meg. A jelen tanulmányban levezetett mutató pedig alkalmas az aszimmetria mértékének és irányának számszerűsítésére, továbbá az azonos nagyságú koncentrációarányal rendelkező görbék közötti különbségtételre. Koncentrációs elemzésekben tehát a Gini-féle koncentrációarány meghatározása mellett javasoljuk a megfelelő aszimmetria-értékek feltüntetését is.

IRODALOM

- (1) Die Konzentration in der Wirtschaft. I–III. Hrsg.: H. Arndt. Schriften des Vereins für Sozialpolitik. 20/1–3. köt. Duncker–Humblot, Berlin. 1970. 1702 old.
- (2) Éltető Ödön – Vita László: Jövedelemeloszlások közelítése és prognosztizálása. *Sigma*. 1982. évi 1–2. sz. 15–39. old.
- (3) Fonyódi Valéria – Dr. Gombosiné Gárdos Eszter – Harsányi László: Bér- és keresetelemzés regresszióanalízissel. *Statistikai Szemle*. 1977. évi 2. sz. 163–174. old.
- (4) Frigyes Ervin: A munkások és alkalmazottak jövedelemeloszlásának elemzése és tervezési módszerei. Kandidátusi értekezés. 1965. 209 old.
- (5) Kahnwald, H.: Ein „dynamisches“ Konzentrationsmass. *Allgemeines Statistisches Archiv*. 1974. évi 2. sz. 143–159. old.
- (6) Kádas Kálmán: A „matematikai közgazdaságtan” lehetőségei és korlátai. *Magyar Tudomány*. 1969. évi 10. sz. 605–613. old.
- (7) Kádas Kálmán: Statisztika I–II. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest. 1980. 420 old.
- (8) Kádas Kálmán: Az ökonometriai kutatás célkitűzései és módszerei. *Közgazdasági Szemle*. 1957. évi 5. sz. 547–559. old.
- (9) Kellerer, H. – Schaich, E.: Statistische Probleme der Erfassung von Konzentrationsphänomenen. *Megjelent: (1) 41–74. old.*

- (10) Kerékgyártó Györgyné: A koncentráció mérése. A mezőgazdasági termelés koncentrációjának vizsgálata. Kandidátusi értekezés. (Kézirat.)
- (11) Lorenz, M. O.: Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American Statistical Association*. 1905. 209–219. old.
- (12) Marx Károly: A tőke. A politikai gazdaságtan bírálata. 1. köt. A tőke termelési folyamata. Kossuth Könyvkiadó. Budapest. 1973. V, 820 old.
- (13) Mundruczó György: Alkalmazott regressziószámítás. Akadémiai Kiadó. Budapest. 1981. 258 old.
- (14) Rudin, W.: A matematikai analízis alapjai. Műszaki Könyvkiadó. Budapest. 1978. 355 old.
- (15) Sipos Béla: Termelési függvények – vállalati prognózisok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 1982. 278 old.
- (16) Theil, H.: Közgazdaságtan és információelmélet. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 1970. 501 old.
- (17) Theiss Ede: Statisztikai törvényszerűség a jövedelemeloszlásban. (Pareto törvénye.) *Közgazdasági Szemle*. 1935. évi 1. sz. 1–38. old.
- (18) Tűz Lászlóné: Az ipari koncentráció mérése. Statisztikai módszerek – témadokumentáció 12. KSH Könyvtár és Dokumentációs Szolgálat. Budapest. 1980. 93 old.
- (19) Új módszer a fizikai dolgozók bérarányainak vizsgálatára. (Regresszióanalízis.) Statisztikai időszaki Közlemények 458. köt. Központi Statisztikai Hivatal. Budapest. 1980. 56 old.

РЕЗЮМЕ

Целью авторов является проведение регрессивного анализа данных о заработной плате и исследование концентрации заработной платы на фабрике кожевенных изделий в городе Печ.

В первой главе авторы производят отбор важнейших из числа действующих на заработную плату факторов и затем в числовой форме излагают воздействие этих пояснительных переменных на заработную плату. Определение оптимального регрессивного уравнения производился с помощью «ступенчатого» метода. В ходе расчетов были получены ожидаемые результаты (например среди работников умственного труда имеются более резкие различия, чем между работниками физического труда, далее заработная плата мужчин — при равных прочих условиях — превышает заработную плату женщин, но имели место также и неожиданные выводы (например то, что по мере роста трудового стажа на фабрике — при неизменных прочих условиях — заработная плата сокращается).

Во второй части своей статьи авторы производят исследование концентрации, преследующее две цели: во-первых, с помощью нескольких распространенных измерительных показателей (коэффициент Джини и показатель Тейля) предоставить общую картину о существующих неравномерностях в области заработной платы и, во-вторых, преодолеть недостаток коэффициента Джини, заключающийся в том, что он и в случае различных по рассеянию частотных рядов может давать одинаковые величины. Эту вторую задачу авторы решили путем интерпретации и измерения принадлежащей к частотному ряду асимметрии кривой Лоренца. Расчеты показывают, что кривые Лоренца в большинстве случаев не выражают асимметричности, поэтому наряду с коэффициентом Джини всегда целесообразно приводить также и значение асимметрии.

SUMMARY

The study shows the regression results and the analysis of the concentration of wages using the data of the leather factory at Pécs.

In the first chapter the authors select the most important factors influencing wages and quantify the impact exerted by effect of the explaining variables on wages. The best regression equation was chosen by means of the stepwise method. The computations provided partly expected results (for instance inequalities are more pronounced among non-manual workers than among manual ones or males receive higher wages than females, other conditions being unchanged) and unexpected results too.

In the second chapter of the study the authors carried out the analysis of concentration which had two purposes to outline the inequalities of wages at the enterprise by means of some generally accepted indicators (Gini's coefficient, Theil's indicator) on the one hand and to eliminate the deficiency of Gini's coefficient, namely that it may assume the same value in the case of different frequency distributions. The authors solved the second problem through interpreting and measuring the asymmetry of the Lorenz curve attached to the frequency distribution. The computations pointed out that Lorenz curves can not generally be taken symmetrical, therefore it is always expedient to indicate, in addition to the Gini's coefficient, the value of asymmetry too.