LOGISZTIKUS REGRESSZIÓS EREDMÉNYEK ÉRTELMEZÉSE*

BARTUS TAMÁS

A tanulmány azt vizsgálja, hogy logisztikus regressziós modellek értelmezésére jobban alkalmasak-e a marginális hatások (feltételes valószínűségek különbségei), mint a nyers paraméterbecslések vagy az azokból számolt esélyhányadosok. Az esélyhányados és a marginális hatás közötti alapvető eltérés az, hogy míg az esélyhányados csak a paraméterbecslés függvénye, a marginális hatás viszont függ más változók értékeitől és paraméterbecsléseitől is. A marginális hatás elméletének és becslési módszereinek tisztázása után példákkal mutatom be, hogy az esélyhányados hamis képet festhet az oksági kapcsolat pontos nagyságáról, valamint multinomiális logisztikus regressziós modelleknél az oksági kapcsolat irányáról. A tanulmány néhány javaslatot fogalmaz meg a regressziós eredmények publikálásával kapcsolatban.

TÁRGYSZÓ: Esélyhányados. Marginális hatás. Logisztikus regresszió.

A tanulmány a logisztikus regressziós eredmények értelmezésével foglalkozik. Ideális esetben a statisztikai bizonyítékok értelmezése oksági kapcsolatok nagyságának megállapítását jelenti, hiszen a kutatást motiváló elméletek, hipotézisek, gondolatok legtöbbször változók oksági kapcsolatát fogalmazzák meg. Meglepő módon a kutatási beszámolók többsége nem fordítja le a statisztikai bizonyítékokat a kutatást motiváló elmélet nyelvére (*King–Tomz–Wittenberg*; 2000). Az empirikus eredmények értelmezésének általános gyakorlata a szignifikáns hatások megállapítása. Tegyük fel, hogy az elméleti érdeklődés középpontjában levő változó paraméterbecslése egy regressziós modellben szignifikáns és a paraméter előjele konzisztens az elmélettel. Ezt a tényt a kutatók zöme úgy értelmezi, hogy az említett változónak szignifikáns hatása van, és ezért arra következtet, hogy az adatok alátámasztják az elméletet. A következtetés alapjául szolgáló értelmezés azonban kétséges. A probléma az, hogy az értelmezés összekeveri a szignifikáns fogalom két teljesen eltérő jelentését: a statisztikai szignifikanciát, valamint az elméleti jelentőséget (*Mulaik–Raju–Harshman*; 1997).[1] Ha statisztikai szignifikanciáról van szó, akkor a „statisztikailag szignifikáns hatása van” kifejezés csak annyit jelent,

* A tanulmány a TÁRKI-ban 2002. január 9-én tartott előadás, valamint a *Bertalan László* emlékére rendezett konferencián (2002. március 25–26. Budapest) megtartott előadás anyagának továbbfejlesztett változata. Hasznos megjegyzéseiért köszönettel tartozom *Kézdi Gábornak*, *Lengyel Györgynek*, *Rudas Tamásnak* és *Tardos Róbertnek*. Külön köszönöm *Tóth István Györgynek*, hogy rendelkezésemre bocsátotta a tanulmányban használt adatokat.

[1] Ez a kettős jelentés különösen az angol *significant* kifejezés jelentésein érezhető.

hogy „hatása van". A „statisztikailag szignifikánsan" jelző redundáns, mert a mintából csak akkor következtetünk valóságos hatásra, ha a paraméterbecslés szignifikáns. (Ha a becslés szignifikáns, van hatás; ha a becslés nem szignifikáns, nem tudjuk, van-e hatás.) Ha viszont a „szignifikáns hatása van" kifejezés azt jelenti, hogy „jelentős, komoly hatása van", akkor a következtetés megalapozatlan, hiszen teljesen önkényes egy paraméterbecslést fontos hatásként feltüntetni, ha a szóban forgó becslést nem hasonlítjuk össze más változók hatásával, vagy pedig egy elméleti szempontok alapján előre megállapított hatásnagysággal. A probléma tehát az, hogy a szignifikáns hatások megállapítása olyan gyakorlat, amely helytelen, vagy megalapozatlan értelmezéshez vezet. Ezért az értelmezésből levont tartalmi következtetés sem lehet helyes és megalapozott. A probléma természetesen elkerülhető, ha a kutató kísérletet tesz a paraméterbecslések összehasonlítására.

Tanulmányom tehát logisztikus regresszióval becsült paraméterek értelmezésével foglalkozik.[2] Logisztikus regressziós modellekben a függő változó kategorikus, az egyes kategóriák bekövetkezésének a valószínűsége a függő változók és azok paramétereinek nemlineáris (logisztikus) függvénye. A logisztikus regressziós modelleket használó kutatók gyakran az esélyhányadosok terminusaiban értelmezik a becslési eredményeket. A tanulmányban bizonyítani próbálom, hogy sem a nyers paraméterbecslések, sem az esélyhányadosok nem engedik meg eltérő hatások pontos összehasonlítását. Sőt, bonyolultabb logisztikus regressziós modellekben az esélyhányadosok még a hatás irányának a megállapítását sem teszik mindig lehetővé. Az esélyhányadosok használatának a kritikája mellett van egy másik célom is. Egy olyan módszert fogok bemutatni, amely lehetővé teszi a paraméterbecslések mögött rejtőző oksági hatások becslését és összehasonlítását. A módszer lényege a becslési eredmények értelmezése feltételes várható értékek különbségeinek (marginális hatások)[3] terminusaiban (*Long*; 1997, *Greene*; 2000, *King–Tomz–Wittenberg*; 2000).[4]

Érvelésem szerint jó okunk van arra, hogy oksági kapcsolatok erejét feltételes várható értékek különbségeként – azaz marginális hatásokkal – mérjük. Logisztikus regressziós modelleknél egy változó marginális hatása nemcsak a változó paraméterbecslésétől függ, hanem más változók értékeitől és paraméterbecsléseitől is (*Long*; 1997, *Greene*; 2000). Az esélyhányados viszont csak a vizsgált változó paraméterbecslését veszi figyelembe. Ezért az esélyhányados bizonyos feltételek mellett tévesen mutatja meg a feltételezett oksági kapcsolat nagyságát és irányát.

A tanulmány első részében a marginális hatás feltételes valószínűségek különbségére épülő fogalmát, a fogalom filozófiai hátterét, valamint a marginális hatás becslésének (rögzítés és átlagolás) módszereit ismertetem. Ebben az oksági következtetések filozófiai és statisztikai irodalmára, valamint a marginális hatás becslését tárgyaló irodalomra támaszkodik. A második részben különböző példákkal fogom illusztrálni, hogy – az átlagolás módszerével becsült marginális hatásokat figyelembe véve – a nyers paraméterbecslések, illetve az esélyhányadosok hamis képet festenek a változók közötti összefüggés nagy-

[2] Írásomban nem foglalkozom az ökonometriában népszerű probit modellekkel, mivel ezeket nem lehet értelmezni az esélyhányadossal. Tanulmányom egyik fő célja pedig kétségbe vonni azt a nézetet, miszerint az esélyhányadosok alkalmasak a becslési eredmények értelmezésére.

[3] A marginális hatás itt a releváns szakirodalomban található *marginal effect* kifejezés tükörfordítása.

[4] Tanulmányom nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy milyen feltételek mellett értelmezhetők a regressziós paraméterek oksági hatásként, és milyen feltételek mellett tekinthetők a paraméterbecslések az oksági hatás konzisztens becsléseinek. Erről a problémáról lásd például *Sobel* (1998), *Winship* és *Morgan* (1999), valamint *Goldthorpe* (2001) tanulmányait.

ságáról és irányáról. A példáknál nemcsak az esélyhányadosok kudarcait fogom megmutatni, hanem – empirikusan tesztelhető és alátámasztott – magyarázatokat is adok a kudarcokra. Ezek a magyarázatok azokra a feltételekre hívhatják fel a kutatók figyelmét, amelyek mellett az esélyhányadosokon alapuló értelmezés egybeeshet a marginális hatáson alapuló értelmezéssel. A tanulmány harmadik része néhány gyakorlati tanácsot fogalmaz meg a logisztikus regressziót használó kutatóknak.

A MARGINÁLIS HATÁS DEFINÍCIÓJA, ELMÉLETI HÁTTÉRE, BECSLÉSI MÓDSZEREI

Az empirikus elemzések talán legfontosabb célja az, hogy megállapítsa az elmélet által előre jelzett oksági kapcsolat irányát és nagyságát. Az eredmények értelmezésnek ekkor olyan gyakorlatnak kell lennie, amely a statisztikai bizonyítékokat lefordítja az oksági kapcsolatok nyelvére. Amikor a kutatók elméleteket, modelleket fogalmaznak meg, rendszerint várható értékek vagy valószínűségek változásainak terminusaiban fogalmazzák meg az oksági kapcsolatokat vagy ezek empirikus következményeit.

Probabilisztikus okság és a marginális hatás mérése

Hume óta elfogadott az a nézet, hogy az oksági kapcsolat fennállásának három feltétele van: *1*. ok és okozat tér- és időbeli összekapcsolódása, *2*. az ok megelőzi az okozatot, valamint *3*. az ok és az okozat közötti kapcsolat állandó vagy szükségszerű (*Suppes*; 1970). Az empirikus elemzés fázisában különösen a harmadik kritérium tisztázása fontos ahhoz, hogy a megfigyelt szabályszerűségeket oksági kapcsolatként tudjuk értelmezni.[5] Az oksággal foglalkozó irodalomban (*Suppes*; 1970, *Lieberson;* 1985, *Sobel*; 1998, *Winship–Morgan*; 1999) rendszerint vagy a statisztikai függőség, vagy az okság tényellentétes fogalmát használják a harmadik kritérium kifejtéséhez.

Tegyük fel, hogy az x és y változók egy C, illetve egy E esemény bekövetkezését mérik.[6] Ha C bekövetkezik, akkor x=1, míg ha C nem következik be, akkor x=0. Hasonlóan, y=1, ha E bekövetkezik, míg y=0, ha E nem következik be. Tegyük fel azt is, hogy C hamarabb következik be, mint E. Az x és y változók között akkor áll fenn oksági kapcsolat, ha C esemény oka E eseménynek. Az okság tényellentétes felfogása alapján C akkor és csak akkor oka E-nek, ha két feltétel teljesül. Az első feltétel az, hogy ha C bekövetkezik, akkor nagy valószínűséggel E is bekövetkezik, azaz a $P(y=1|x=1)$ valószínűség nagy. A második feltétel az, hogy ha C nem következett volna be, akkor nagy valószínűséggel E sem következett volna be, azaz a $P(y=0|x=0)$ valószínűség is nagy. Mivel

[5] Tanulmányom nem foglalkozik az okság első két kritériumával. Habár az időbeli sorrend figyelembevétele szükséges feltétele az adatelemzés helyességének, az időbeliség nem vet fel további fogalmi problémákat. Az első kritérium empirikus kutatás számára releváns módosítására kitűnő példa az eseménytörténet-elemzés (*Blossfeld–Rohwer*; 1995, *Pötter–Blossfeld*; 2001). Érdemes megjegyezni, hogy az oksági elemzés *Lazarsfeld* által kidolgozott módszerében az első és a harmadik kritériumok megfogalmazása eltér az itt ismertetettől (*Hyman*; 1955).

[6] A változók és az események nyelvének analitikus szétválasztása és együttes használata két okból célszerű. Egyrészt a filozófiai irodalomban, ahonnan az okság tényellentétes felfogását a statisztika kölcsönvette, az okságot nem változók, hanem események között fennálló kapcsolatként elemzik. Másrészt, elméleti szempontból kitüntetett jelentősége van annak, hogy változók oksági kapcsolatát események között fennálló oksági kapcsolatra redukáljuk. Régi és közismert gondolat a társadalomtudományokban, hogy az empirikus munkában feltárt statisztikai összefüggések csak akkor értelmezhetők oksági összefüggésekként, ha feltárjuk, milyen folyamatok, mechanizmusok húzódnak meg a statisztikai összefüggések mögött. Az események nyelve természetesen a folyamatok, mechanizmusok leírását szolgálja.

$P(y=0|x=0)=$
$=1-P(y=1|x=0)$, a második feltétel úgy is kifejezhető, hogy $P(y=1|x=0)$ kicsi. Ezek alapján x változó csak akkor gyakorol (pozitív) oksági hatást y-ra, ha

$$P(y=1|x=1) > P(y=1|x=0).$$ [7]

Az oksági kapcsolatok erejének mérésekor tehát a $P(y=1|x=1)$ és a $P(y=1|x=0)$ feltételes valószínűségek összehasonlítása a cél. Az összehasonlítás eszköze a marginális hatás, azaz feltételes várható értékek különbsége. A marginális hatás, $\Delta P(y=i|x)$ meghatározása a következő:

$$\Delta P(y=1|x) = P(y=1|x=1)-P(y=1|x=0). \qquad /1/$$

A marginális hatásnak van három olyan tulajdonsága, amely nagyon egyszerűvé teszi értelmezését. Az első tulajdonság az, hogy a marginális hatás értékkészlete korlátos, mivel valószínűségek különbsége: a marginális hatás abszolút értéke legfeljebb 1 lehet. A második kedvező tulajdonság az, hogy a szélső értékek világos elméleti jelentéssel bírnak: a marginális hatás abszolút értékei közül a 0 a kapcsolat hiányát (a statisztikai függetlenséget), az 1 pedig a kapcsolat determinisztikus jellegét mutatja. A harmadik kedvező tulajdonság az, hogy a marginális hatás szimmetrikus: ha a marginális hatás értéke α, és a függő vagy a független változó kódolását felcseréljük, a marginális hatás új értéke $-\alpha$ lesz.

A marginális hatás becslése kategorikus függő változójú regressziós modelleknél[8]

Az oksági kapcsolatok tanulmányozásához többváltozós regressziós modelleket használnak a kutatók. Bemutatom, hogyan alkalmazható a marginális hatás definíciója regressziós modelleknél. Legyen y a kategorikus függő változó, x pedig az a független változó, amelynek y-ra gyakorolt hatását tanulmányozzuk. Legyen β az x változó paraméterbecslése, $\mathbf{z}$ a kontroll változók, valamint a konstans vektora, $\boldsymbol{\gamma}$ pedig a kontroll változók és a konstans paraméterbecsléseit tartalmazó vektor. Legyen $F(\bullet)$ az az eloszlásfüggvény, amely $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ értékeit leképezi a $[0,1]$ intervallumra. Azaz, $P(y=1|x,\mathbf{z})=F(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})$. Legyen $f(\bullet)$ függvény az $F(\bullet)$ függvénynek megfelelő sűrűségfüggvény, azaz $F(\bullet)$ $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ szerint vett deriváltja. Ha x egy dummy változó, akkor x marginális hatása /1/ alapján a következő:

$$\Delta P(y=1|x,\mathbf{z}) = P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=1)-P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=0) = F(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=1)-F(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=0). \qquad /2/$$

[7] Ugyanez az összefüggés következik a statisztikai függőség elvéből is. E esemény statisztikailag függ C eseménytől, ha $P(E|C)\neq P(E)$. Ezért x és y változók között csak akkor áll fenn pozitív oksági kapcsolat, ha $P(E|C)>P(E)$ (*Suppes*; 1970). Mivel $P(y=1)=P(y=1|x=1)P(x=1)+P(y=1|x=0)P(x=0)$ és $P(x=0)=1-P(x=1)$, a $P(y=1|x)>P(y=1)$ egyenlőtlenség átalakítható a $P(y=1|x=1)$
$[1-P(x=1)] >P(y=1|x=0)$ $[1-P(x=1)]$ egyenlőtlenséggé. Ha C bekövetkezési valószínűsége egynél kisebb, az egyenlőtlenség mindkét oldala osztható $[1-P(x=1)]$-gyel, és megkapjuk az első egyenlőtlenséget. Ha C tényleg oka E-nek, a $P(x=1)<1$ feltevés elengedhetetlen, hiszen nem lehet ok egy olyan esemény, amelynek bekövetkezése nem manipulálható (*Sobel*; 1998).

[8] Ez a szakasz túlnyomó részben *Long* (1997) és *Greene* (2000) munkáinak megfelelő részein alapul.

Folytonos változók esetén a feltételes valószínűségek különbsége helyett célszerű a $P(y=1|x,\mathbf{z})$ feltételes valószínűség x szerint vett parciális deriváltját tanulmányozni. Azaz, a marginális hatás jelentése folytonos változóknál az, hogy mennyivel változik az esemény bekövetkezésének valószínűsége, ha x végtelenül kis mennyiséggel növekszik. Tehát, ha x folytonos, akkor x marginális hatása

$$\Delta P(y=1|x,\mathbf{z}) = \partial P(y=1)/\partial x = [\partial P(y=1)/\partial(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]\beta = \mathrm{f}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})\beta. \qquad /3/$$

Elképzelhető az a gyakorlat, hogy x változó hatásának értelmezésekor kizárólag β irányára és nagyságára hagyatkozzunk. Ez azon alapul, hogy lineáris regresszió esetén a marginális hatás egyenlő a paraméterbecsléssel. Tegyük fel, hogy egy esemény bekövetkezését lineáris regresszióval modellezzük. (Ez a modell a lineáris valószínűségi modell. A lineáris valószínűségi modell használata statisztikai szempontból nem szerencsés, de ettől ebben az esetben eltekinthetünk). Lineáris regressziónál $\mathrm{F}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})=\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$. Ezért x dummy marginális hatása:

$$\Delta P(y=1|x,\mathbf{z}) = [\beta(1)+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}] - [\beta(0)+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})] = \beta.$$

Ugyanez az eredmény, ha x folytonos $\partial P(y=1)/\partial x = \beta$. Lineáris regressziónál tehát x marginális hatása egyenlő x paraméterbecslésével (β), ezért a marginális hatások gyorsan és könnyen megállapíthatók a megfelelő paraméterbecslések segítségével.

Bonyolultabb a helyzet akkor, ha a szóban forgó esemény bekövetkezését binomiális logisztikus regresszióval tanulmányozzuk. Ebben a modellben az esemény bekövetkezésének a valószínűségét a következő nemlineáris egyenlet határozza meg:

$$P(y=1|x,\mathbf{z}) =[1+\exp(-\beta x-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]^{-1}.$$

Az x dummy változó egységnyi növekedésének a hatása tehát

$$\Delta P(y=1|x,\mathbf{z}) = [1+\exp(-\beta-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]^{-1} - [1+\exp(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]^{-1}.$$

A lineáris regresszióval ellentétben nem igaz az, hogy x egységnyi növekedése β-val növeli meg az esemény bekövetkezésének a valószínűségét. Az x változó hatása ugyanis nemcsak β, hanem $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ függvénye is. Ezért nemlineáris modelleknél x marginális hatásának megállapításához nemcsak x paraméterbecslését, hanem a kontrollváltozók értékeit és paraméterbecsléseit is tanulmányozni kell. A marginális hatás kiszámításánál a fő nehézség az, hogy /2/ és /3/ alapján a marginális hatás megfigyelésről megfigyelésre változik. A nemlineáris modelleknél tehát az a probléma merül fel, hogyan fogaljuk össze egyetlenegy számmal a megfigyelésről megfigyelésre változó marginális hatást.

Erre e problémára két megoldás létezik: a rögzítés és az átlagolás módszere (*Long*; 1997). A rögzítés módszerének a lényege az, hogy keres egy olyan vektort, amely „reprezentálja" az elemzésbe bevont változók mintabeli értékeit, majd ezt a reprezentatív értéket helyettesíti a /2/ és /3/-ba. A rögzítés módszere tehát két lépésből áll. Először **z** értékeit egy-egy kiválasztott értéken rögzítjük. (Természetesen, ha x folytonos, akkor x értékét is rögzíteni kell.) Habár a rögzítéshez használt értékek kiválasztása elvileg önkényes, érdemes olyan értékeket kiválasztani, amelyek a változók tipikus értékeinek felelnek meg. A leggyakrabban használt tipikus érték a mintabeli átlag. Ezután a kiválasztott értékeknél már könnyű kiszámolni a marginális hatást. A rögzítés módszerével kiszámolt marginális hatást a továbbiakban rögzített marginális hatásnak fogom nevezni.

A rögzítés módszerének van egy érdekes alkalmazási lehetősége. Logisztikus regresszió esetén a /3/-ban szereplő $[\partial P(y=1)/\partial(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]$ derivált értéke azonos a $P(y=1|x,\mathbf{z})P(y=0|x,\mathbf{z})$ szorzattal. Ez a szorzat pedig a kétértékű y változó varianciája. Az x és $\mathbf{z}$ változók elvileg rögzíthetők $P(y=1|x,\mathbf{z})P(y=0|x,\mathbf{z})=\mathrm{Var}(y)$ értéken, ahol $\mathrm{Var}(y)$ y mintabeli varianciája. Mivel y varianciája egy ismert konstans érték, a marginális hatás egyszerűen a $\mathrm{Var}(y)\beta$ szorzattal azonos (*Amemiya*; 1981). Ez a módszer nagyon egyszerűvé teszi a binomiális logisztikus regresszió eredményeinek értelmezését. Ha például y mintabeli átlaga pontosan 0,5, akkor $\mathrm{Var}(y)=P(y=1)P(y=0)\beta=0{,}25\beta$, tehát a marginális hatás a paraméterbecslésnek negyede. Ha viszont y egy ritka vagy gyakori esemény bekövetkezését méri, akkor x marginális hatása kisebb; ha például $P(y=1)$ értéke 0,1 vagy 0,9, a marginális hatás a paraméterbecslés 9 százaléka. Ez az eljárás azért érdekes, mert megkíméli a kutatót attól, hogy a marginális hatás becslésekor figyelembe vegye x és $\mathbf{z}$ értékeit. Viszont y varianciájának használata természetesen elkötelezi a kutatót egy adott $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ kombináció mellett, hiszen x és $\mathbf{z}$ értékeit úgy kell kiválasztani, hogy $\mathrm{f}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})=\mathrm{Var}(y)$. Ha ez a kombináció tartalmi szempontból értelmetlen, akkor kétséges az, hogy valójában értelmeztük-e a paraméterbecsléseket. A módszer használatának másik korlátja az, hogy dummy változóknál $\mathrm{Var}(y)\beta$ csak közelítőleg azonos a /2/-vel számolt valós marginális hatással. Logisztikus regressziónál $\Delta P(y=1|x)=P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=0)[1-P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=1)][\exp(\beta)-1]$. Ha β közel van nullához, akkor $\exp(\beta)-1\approx\beta$ és $P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=1)\approx P(y=1|\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z},x=0)$, ezért $\Delta P(y=1|x)\approx\mathrm{Var}(y)\beta$.

A rögzítés módszerének van egy komoly problémája: a módszer nem használható, ha a kontrollváltozók között vannak dummy változók, hiszen egy dummy változó átlaga tartalmi szempontból nem értelmes mennyiség. Ezért minden egyes dummyról el kell dönteni, hogy 0 vagy 1 értéket vegyen fel. Mivel önkényes az a döntés, hogy az egyes dummy változók a 0 vagy az 1 értéket vegyék fel, az alapos értelmezés megköveteli, hogy a marginális hatást a dummy változók összes lehetséges kombinációinál kiszámoljuk. Ez bonyolulttá teszi a számításokat, hiszen ha k számú dummy változónk van, akkor 2^k elvileg különböző marginális hatást kell kiszámolni.

Az átlagolás módszere megbirkózik ezekkel a problémákkal. Ez a módszer szintén két lépésből áll (*Long*; 1997). Először – attól függően, hogy x dummy vagy folytonos – /2/-t vagy /3/-at felhasználva kiszámoljuk a $\Delta P(y=1|x,\mathbf{z})$ mennyiséget minden egyes mintabeli megfigyelésnél. Az első lépés eredménye tehát egy új változó. A második lépésben kiszámoljuk ennek az új változónak az átlagát, és ezt az átlagot tekintjük a marginális hatásnak. Tömören fogalmazva, a marginális hatás az egyes megfigyelésekhez tartozó „individuális” marginális hatások mintabeli átlagai. Érdemes ezért az átlagolás módszerével kiszámolt marginális hatást átlagos marginális hatásnak nevezni.

Egy dummy változó átlagos marginális hatása tehát az $\mathrm{F}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})$ függvényben bekövetkező azon diszkrét változások mintabeli átlaga, amikor a dummy értéke 0-ról 1-re nő, míg a többi változó értéke változatlan marad:

$$\Delta P(y=1|x) = N^{-1}\Sigma[\mathrm{F}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}|x=1) - \mathrm{F}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}|x=0)] = N^{-1}\Sigma[\mathrm{F}(\beta+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]. \qquad /4/$$

Egy folytonos változó marginális hatása pedig az $F(\beta x+\gamma\mathbf{z})$ függvény deriváltjainak mintabeli átlaga:

$$\Delta P(y=1|x) = N^{-1}\Sigma f(\beta x+\gamma\mathbf{z})\beta. \qquad /5/$$

Melyik módszert érdemes használni a marginális hatás becslésekor? Jelenleg nincs általánosan elfogadott érv azzal kapcsolatban, hogy a rögzített vagy az átlagos marginális hatás tekintendő-e a marginális hatás koncepciója jó mérőszámának. Az átlagolás módszere mellett szól az, hogy ez a módszer jobban megbirkózik a dummy változókkal kapcsolatos problémákkal. Az átlagolás módszere ugyanakkor több számolást igényel. Szerencsére ezt a problémát könnyű megoldani: a /4/ és /5/ alapján lehetséges a számítások programozása. A számolási nehézségekre való hivatkozás nem meggyőző érv akkor, amikor a legnépszerűbb statisztikai programcsomagok sokkal bonyolultabb számítási problémákat is képesek megoldani. A tanulmány hátralevő részében közölt elemzések is az átlagolás módszerével kiszámolt átlagos marginális hatások.[9]

Az átlagos marginális hatás varianciájának becslése

A marginális hatás becslésének az a célja, hogy támpontot nyújtson a változók hatásainak megállapításához, és lehetővé tegye eltérő változók hatásainak összehasonlítását. Az átlagos marginális hatás becslése után a statisztikai bizonyíték a következő módon is kifejezhető: például „az apa iskolázottságának egységnyi növekedése átlagosan *p* százalékkal növeli a felsőfokú végzettség megszerzésének a valószínűségét". A marginális hatások becslése tehát lehetővé teszi a statisztikai bizonyítékok értelmezését, azaz lefordítását a kutatást motiváló elmélet nyelvére. Azonban a marginális hatás becslése önmagában kevés ahhoz, hogy az elméletorientált értelmezés teljes legyen.

Először is a marginális hatás önmagában nem adja vissza teljesen a becslési eredményeket, mivel nem fejezi ki a becslési bizonytalanságot (*King–Tomz–Wittenberg*; 2000). A probléma ideális bemutatása a következő lenne: „95 százalékos biztonsággal mondhatjuk azt, hogy az apa iskolázottságának egységnyi növekedése átlagosan $p \pm q$ százalékkal növeli a felsőfokú végzettség megszerzésének a valószínűségét". A becslési bizonytalanság kifejezéséhez szükség van arra, hogy a paraméterbecslések standard hibáit lefordítsuk a marginális hatások nyelvére, vagyis arra, hogy megbecsüljük a marginális hatások varianciáját.

Szintén a varianciabecsléshez vezet egy másik probléma. Korábban amellett érveltem, hogy a szignifikáns hatásokon alapuló értelmezés azért helytelen, mert az értelmezés során nem hasonlítják össze a vizsgált változó paraméterbecslését más változók paraméterbecslésével vagy egy, az elmélet által diktált értékkel. A paraméterek összehasonlítása azonban csak akkor megfelelő, ha kizárjuk azt a hipotézist, hogy két paraméterbecslés valójában azonos. Ugyanez a probléma érvényes a becsült marginális hatásokra is. A marginális hatások azonosságára vonatkozó hipotézis tesztelése pedig megköveteli a marginális hatások varianciájának becslését.

[9] A népszerű SPSS programcsomagban nincs beépített program a marginális hatások becslésére. A számításokat a Stata programcsomag 6-os változatában végeztem el, a marginális hatás becslésére kifejlesztett makró segítségével, amely letölthető a http://www.bkae.hu/bartus weboldalról.

Az átlagos marginális hatások varianciájának becslésére két módszer kínálkozik (*King–Tomz–Wittenberg*; 2000). Az egyik módszer analitikus: a becsült marginális hatások, valamint a paraméterek variancia-kovariancia mátrixából kiszámítható a marginális hatások varianciája a delta módszer segítségével. A számítás módszerét a Függelék ismerteti (egy tömörebb kifejtés megtalálható például *Greene* (2000) könyvében is). Mivel a becslés egy nemlineáris függvény linearizálásán alapul, a becsült varianciák közelítések. Ezért az analitikus megoldásból származó eredményeket óvatosan kell kezelni. A másik módszer nem analitikus, hanem szimulációval becsüli meg a marginális hatások varianciáját. *King* és szerzőtársai amellett érvelnek, hogy a szimuláción alapuló módszer a jobb. Mivel tapasztalataim szerint az analitikus módszer is elég pontos becslési eredményekhez vezet, a szimulációs módszerek használata viszont időigényesebb, a tanulmányban szereplő példákban az analitikus becslési módszert használtam.

AZ ÁTLAGOS MARGINÁLIS HATÁS ÉS AZ ESÉLYHÁNYADOS A LOGISZTIKUS REGRESSZIÓNÁL

A logisztikus regressziós modellek értelmezésének tipikus eszköze az esélyhányados. Az esélyhányados azt mutatja, hányszorosára nő egy esemény bekövetkezésének a feltételes esélye (odds) – azaz a $P(y=1|x)/P(y=0|x)$ hányados –, ha a feltételváltozó (x) értéke egységnyivel nő. Az esélyhányados használata mellett a következő érv szól. Tegyük fel, hogy y kétértékű változóra x pozitív hatást gyakorol. Ekkor /1/ alapján $P(y=1|x=1)>P(y=1|x=0)$. /1/ azt is maga után vonja, hogy $P(y=0|x=1)<P(y=0|x=0)$. Tehát, ha x hatása pozitív, akkor $P(y=1|x=1)/P(y=0|x=1)$ nagyobb, mint $P(y=1|x=0)/P(y=0|x=0)$, azaz a $P(y=1|x=1)P(y=0|x=0)/P(y=0|x=1)P(y=1|x=0)$ kifejezés is nagyobb egynél. Az említett kifejezés az esélyhányados. Jól ismert tény, hogy ha az esélyhányadost definiáló feltételes valószínűségekbe behelyettesítjük a binomiális logisztikus regressziót definiáló $P(y=1|x,\mathbf{z})=[1+\exp(-\beta x-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})]^{-1}$ valószínűséget, az esélyhányados természetes alapú logaritmusa β-val azonos. Mivel az esélyhányados kizárólag a paraméterbecslés függvénye, az eredmények értelmezése sokkal egyszerűbb az esélyhányadossal, mint az átlagos marginális hatással.

Ha az oksági kapcsolat erejét az esélyhányados mérné, akkor egy x változó hatásának nagysága leolvasható lenne x paraméterbecsléséről. Ha viszont az oksági kapcsolat erejét az átlagos marginális hatással mérjük, akkor – ahogy azt korábban ismertettük – x változó hatásának nagysága nem csak x paraméterbecslésének a függvénye. Ebből a fontos különbségből két probléma adódhat. Egyrészt, az esélyhányados hamis képet festhet az oksági kapcsolatok nagyságáról. Másrészt, bonyolultabb regressziós modellekben az esélyhányados valótlan képet mutathat az oksági kapcsolat irányáról is. A most következő példák ezt a két problémát mutatják be.

Binomiális logisztikus regresszió

A *Szociológiai Szemlében Szántó* és *Tóth* (1999) kísérletet tettek a kockázatviselés empirikus elemzésére. Kísérletükben a függő változó azt méri, hogy a megkérdezett elutasít egy fix összegű ajándékot, és inkább egy olyan szerencsejátékot választ, amelyben 50 százalék eséllyel az ajándék kétszeresét, 50 százalék eséllyel viszont semmit sem nyer. Az interjú során az egyéneket három eltérő ajándék – ezer, százezer, és egymillió forint – esetében kérdezték meg a szerencsejáték választásáról. Az emelkedő téteknek megfelelően az empirikus elemzés során a szerzők három binomiális logisztikus regressziós modellt – Játék1, Játék2, és Játék3 – becsültek meg. A független változók a következők: a jövedelem logaritmusa, az iskolai végzettség, a nem, az életkor, az önálló foglalkozás, valamint a Játék2 modellben egy, a Játék3 modellben két dummy, amelyek azt mérik, hogy az egyén kockáztatott-e az előző játék(ok) során.

A becslési eredményeket valamint a marginális hatásokat az 1. tábla tartalmazza. A tábla a Játék1, Játék2 és Játék3 modellek becslési eredményeit tartalmazza. Az egyes modelleken belül az első oszlop a nyers paraméterbecsléseket, a második oszlop a marginális hatásokat mutatja. A paraméterbecslések és a marginális hatások alatt zárójelekben találhatók a standard hibák. Az 1. táblában közölt paraméterbecslések és standard hibái némileg eltérnek a *Szántó* és *Tóth* (1999) által közölt eredményektől. Ennek oka valószínűleg az adatelemzéshez használt szoftverek eltérése.

1. tábla

A szerencsejáték választását befolyásoló tényezők

Változók	Játék1 (Tét: 1 ezer forint)		Játék2 (Tét: 100 ezer forint)		Játék3 (Tét: 1000 ezer forint)	
	β	ΔP	β	ΔP	β	ΔP
Log_{10} (családi jövedelem)	0,923	18,9	0,734	6,7	-0,652	-3,2
	(0,23)**	(4,6)**	(0,33)*	(3,0)*	(0,43)	(2,1)
Életkor[a)]	-0,239	-4,9	-0,122	-1,1	0,082	0,4
	(0,03)**	(0,6)**	(0,05)*	(0,4)**	(0,07)	(0,3)
Iskolai végzettség[b)]	0,185	3,8	0,235	2,1	-0,140	-0,7
	(0,07)**	(1,4)**	(0,10)*	(0,9)*	(0,15)	(0,7)
Nem (1 – férfi, 0 – nő)	0,194	4,0	0,297	2,7	-0,102	-0,5
	(0,09)*	(1,9)*	(0,14)*	(1,3)*	(0,19)	(0,9)
Önálló foglalkozású[c)]	-0,100	-2,0	0,797	7,8	0,038	0,2
	(0,20)	(3,9)	(0,28)**	(2,8)**	(0,35)	(1,8)
Kockáztatott 1. játékban[c)]			3,370	39,1	0,352	1,7
			(0,18)**	(1,9)**	(0,28)	(1,4)
Kockáztatott 2. játékban[c)]					3,427	31,5
					(0,29)**	(4,4)**
Konstans	-4,638		-7,224		-1,268	
	(1,03)**		(1,52)**		(1,96)	

* p<0,05; ** p<0,01.
[a)] 6 kategóriából álló változó.
[b)] 3 kategóriából álló változó.
[c)] 1 ha igen; különben 0.
Forrás: A TÁRKI 1996-os és 1997-es Omnibusz felvételei (*Szántó–Tóth*; 1999).

Szántó és Tóth elemzését az a kérdés vezette, hogyan befolyásolja a jövedelem a kockázatviselési hajlandóságot. Vizsgáljuk meg azt a hipotézist, hogy a jövedelem hatása a kockázatviselési hajlandóságra független a tét nagyságától. A jövedelem logaritmusának paraméterbecslései a Játék1 és a Játék2 modellben 0,923 és 0,734 értéket vesznek fel. A becsléseknek megfelelő esélyhányadosok pedig 2,5 és 2,1. Úgy tűnik, a jövedelmi hatás mindkét modellben azonos. A standard hibák alapján 95 százalékos bizonyossággal mondhatjuk, hogy a paraméterbecslés értéke a Játék1 modellben 0,823 ± 0,451, a Játék2 modellben pedig 0,734 ± 0,647. A konfidenciaintervallumok – [0,472, 1,374] a Játék1 és [0,087, 1,381] a Játék2 modellben – jelentősen átfedik egymást.

Az átlagos marginális hatások alapján viszont eltérő következtetésre jutunk. A Játék1 és a Játék2 modellben az átlagos marginális hatások értéke 18,9 és 6,7, a megfelelő standard hibáké 4,6 és 3,0 százalék. Tehát 95 százalékos bizonyossággal mondhatjuk, hogy a családi jövedelem megtízszereződése ezer forintos tétnél átlagosan 18,9 ± 9 százalék, 100 ezer forintos tétnél pedig 6,7 ± 5,9 százalék eséllyel növeli a szerencsejáték választásának az esélyét. A paraméterbecslésekkel szemben a konfidenciaintervallumok – [9,9, 27,9] a Játék1, [0,8, 12,6] a Játék2 modellben – kevésbé fedik át egymást: a becsült marginális hatások körülbelül a 11 százalékos konfidenciaszint mellett már a valóságban is eltérő értékekként értelmezhetők.

Miért van az, hogy becsült átlagos marginális hatások jobban eltérnek egymástól a becsült paramétereknél? Korábban láttuk (lásd /5/), hogy egy folytonos x változó marginális hatását az

$$N^{-1}\Sigma \mathrm{f}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})\beta$$

képlettel becsüljük. Ha a paraméterek azonossága mellett egy folytonos változó marginális hatása eltér két mintában, akkor ennek csak az lehet az oka, hogy $\mathrm{f}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})$ értékei átlagosan magasabbak abban a mintában, ahol az átlagos marginális hatás is nagyobb. Az egyes megfigyeléseknél számolt $\mathrm{f}(\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z})$ mennyiségek pedig akkor nagyok, ha $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ értékei közel vannak nullához. Az egyes megfigyeléseknél természetesen nehéz lenne minden egyes $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ értéket megvizsgálni. Viszont az egyes $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ értékekről ad bizonyos információt $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelme (a maximális és a minimális érték különbsége) vagy szórása. Ceteris paribus, minél nagyobb $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelme vagy szórása, a súlyozott összegként kiszámolt átlagos marginális hatásban annál több lesz az alacsony értékkel rendelkező egyedi megfigyelés, és ezáltal annál kisebb az átlag. Azaz, minél nagyobb $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelme, annál kisebb x átlagos marginális hatása.

Ezt a magyarázatot könnyű ellenőrizni. A marginális hatás becslése mellett megvizsgáltam $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelmét a Játék1 és a Játék2 modellekben. A Játék1 modellben $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ minimuma –2,4, maximuma 1,4. Ezzel szemben a Játék2 modellben $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ minimuma –4,8, maximuma 2,2. A Játék2 modellben tehát valóban nagyobb $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelme. Ez a tény összecseng *Szántó* és *Tóth* (1999) azon megfigyelésével, hogy szignifikáns és nagy abszolút értékű paraméterbecsléseket leginkább a Játék2 modellben találunk. Mivel a Játék2 modellben nagyobb $\beta x+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ terjedelme, ezért ott kisebb x marginális hatása.

Multinomiális logisztikus regresszió

Az előző példában binomiális logisztikus regressziós eredményekkel szemléltettem, hogy különböző hatások összehasonlítására jobban alkalmas a marginális hatás, mint az esélyhányados. Természetesen ez a következtetés csak akkor meggyőző erejű, ha a kutatás fő célja eltérő oksági hatások pontos összehasonlítása. A gyakorlatban azonban a kutatók rendszerint megelégszenek azzal, hogy eldöntsék egy feltételezett oksági kapcsolat irányát. Ha a kérdés pusztán az, hogy x hatása y-ra pozitív vagy negatív, akkor binomiális logisztikus regressziónál a kérdés megválaszolására egyaránt alkalmasnak tűnik mind a marginális hatás, mind pedig az esélyhányados. Ugyanis a /2/ és a /3/ alapján világos, hogy a marginális hatás előjele megegyezik a paraméterbecslés előjelével. Úgy tűnhet tehát, hogy teljesen felesleges számba venni az esélyhányadosokkal kapcsolatos – valós vagy vélt – értelmezési nehézségeket, és amellett érvelni, hogy az esélyhányados helyett a marginális hatást kell használni.

A következő példákban azonban bemutatom, hogy az esélyhányadosok hamis képet festhetnek a feltételezett oksági kapcsolatok irányáról is. Ez a probléma például akkor merülhet fel, ha a függő változó több mint két kategóriával rendelkezik, és a kutató a multinomiális vagy a rendezett logisztikus regressziót használja. A multinomiális logisztikus regresszió használata elfogadott gyakorlat a társadalmi mobilitást kutatók körében. Ezek a kutatók rendszerint az esélyhányadosok terminusaiban értelmezik az eredményeket. Célszerű ezért a példáinkat a társadalmi mobilitás köréből választani.

A következő példában azt vizsgálom, hogyan befolyásolja az apa iskolázottsága az egyén által elért iskolai végzettséget. Az adatok a TÁRKI 1996-os Monitor felvételéből származnak. Mind az apa, mind az egyén iskolázottságát három kategóriával mérem: legfeljebb 8 általános iskolai osztályt, középfokú iskolát, felsőfokú iskolát végzett. Azért hogy a regressziós modell használata indokolt legyen, az apa iskolázottságának hatásából kiszűrjük az egyén nemével, valamint az oktatás időtartamával kapcsolatos hatásokat. Az oktatás időtartamának hatását az a történeti periódus méri, amikor az egyén betöltötte 14-ik életévét, vagyis amikor dönthetett a középfokú tanulmányok folytatása mellett. Mivel a példa nem kutatási beszámoló, hanem egy módszertani probléma illusztrációja, részletesebb vagy pontosabb mérést, illetve más változók bevonását nem tartottam szükségesnek.

2. tábla

Az egyén iskolai végzettsége az apa iskolai végzettségének függvényében

Változók	Paraméterbecslés		Marginális hatás	
	középfok (1)	felsőfok (2)	középfok (1)	felsőfok (2)
Apa iskolai végzettsége[a]				
középfok	0,970	1,453	6,2	17,4
	(0,189)**	(0,199)**	(3,4)	(3,4)**
felsőfok	1,025	2,752	-11,0	47,4
	(0,396)**	(0,376)**	(5,1)*	(6,0)**
Történeti idő 14 éves korban[b]				
1946–1960	0,972	0,761	12,1	6,5
	(0,263)**	(0,279)**	(4,4)**	(4,2)
1961–1975	1,890	1,618	23,6	13,9
	(0,254)**	(0,265)**	(4,9)**	(4,5)**
1976–1990	1,921	1,186	27,7	5,5
	(0,266)**	(0,284)**	(5,7)**	(4,5)
1991–1996	2,036	0,758	34,6	-1,1
	(0,485)**	(0,532)	(11,1)**	(5,7)
Nem (1 – férfi, 0 – nő)	1,011	0,225	18,9	-5,8
	(0,153)**	(0,169)	(3,1)**	(2,5)*
Konstans	-2,248	-2,098		
	(0,227)**	(0,230)**		

* p<0,05; ** p<0,01 (kétoldalú tesztek).

[a]) Referenciacsoport: legfeljebb az általános iskola 8 osztályát végezte.
[b]) Referenciacsoport: 1946 előtti évek.
Megjegyzés. A paraméterbecsléseknek megfelelő marginális hatások százalékban kifejezve (standard hibák zárójelben) N=1171, χ^2= 354,50, (df=14), a log-likelihood százalékos csökkenése = 0,14.
Forrás: A TÁRKI 1996-os Monitor felvétele.

A becslési eredményeket a 2. tábla tartalmazza. A tábla első két oszlopa a multinomiális logisztikus regresszió két egyenletének – $\boldsymbol{\beta_1 x}$ és $\boldsymbol{\beta_2 x}$ – a paraméterbecsléseit tartalmazza. Ez a két egyenlet a következőképpen kapcsolódik az alapfokú, a középfokú, illetve a felsőfokú végzettség valószínűségéhez:

$$P(\text{végzettség=alapfok}) = [1+ \exp(\boldsymbol{\beta_1 x})+ \exp(\boldsymbol{\beta_2 x})]^{-1}, \qquad /6a/$$

$$P(\text{végzettség=középfok}) = \exp(\boldsymbol{\beta_1 x})[1+ \exp(\boldsymbol{\beta_1 x})+ \exp(\boldsymbol{\beta_2 x})]^{-1}, \qquad /6b/$$

$$P(\text{végzettség=felsőfok}) = \exp(\boldsymbol{\beta_2 x})[1+ \exp(\boldsymbol{\beta_1 x})+ \exp(\boldsymbol{\beta_2 x})]^{-1}. \qquad /6c/$$

A $\boldsymbol{\beta_1 x}$ és $\boldsymbol{\beta_2 x}$ egyenleteket középfok és felsőfok egyenleteknek neveztem el. Ennek oka a következő. Ha például a felsőfok ($\boldsymbol{\beta_2 x}$) egyenletben az összes paraméterbecslés zérus lenne, akkor /6a–6c/ egyenletrendszer annak a logisztikus regressziónak felelne meg, amely a középfokú végzettség megszerzését modellezi. Hasonlóan, ha a középfok ($\boldsymbol{\beta_1 x}$) egyenletben az összes paraméterbecslés zérus lenne, akkor a /6a–6c/ egyenletrendszer egy olyan logisztikus regresszióvá egyszerűsödne, amely a felsőfokú végzettség megszerzését modellezi.

Az eredmények értelmezéséhez először vegyük szemügyre a paraméterbecsléseket. A konstans kivételével az összes paraméterbecslés pozitív. Egy kivételtől eltekintve (nem a felsőfok egyenletben) a becslések statisztikailag szignifikánsak. A családi háttért mérő mindkét változó paraméterbecslései pozitívak mindkét egyenletben. Következik-e ebből az, hogy a családi háttér elősegíti mind a középfokú, mind pedig a felsőfokú iskolai végzettség megszerzését? A /6a/ alapján egyértelmű, hogy a pozitív paraméterbecslésekből az következik, hogy a kedvező családi háttér csökkenti az alapfokú végzettség, és ezáltal növeli a közép- vagy felsőfokú végzettség megszerzésének valószínűségét. A /6b–6c/ alapján az is következik, hogy egy a középfok (felsőfok) egyenletben szereplő pozitív paraméterbecslés pozitív hatásként való értelmezéséhez szükség van a felsőfok (középfok) egyenletben szereplő paraméterbecslések figyelembevételére. A hatások megállapításához tehát további számolásra van szükség.

Ezek a számítások azonban elkerülhetők az esélyhányadosok használatával. Vizsgáljuk meg például azt a kérdést, hogy milyen hatást gyakorol a felsőfokú végzettségű apa a középfokú végzettség megszerzésének valószínűségére. Először osszuk el /6b/-t /6a/-val, és vegyük a hányados logaritmusát. Az eredmény a középfokú végzettség megszerzésének az alapfokúhoz viszonyított esélyének a logaritmusa lesz, ami egyenlő $\boldsymbol{\beta_1 x}$-szel. Ezután számítsuk ki a feltételes esélyek – amikor az apa végzettsége felsőfokú, illetve amikor az apa végzettsége alapfokú – logaritmusait, és vegyük ezek különbségét. Az eredmény egy esélyhányados logaritmusa lesz, aminek az értéke a középfok egyenletben az apa felsőfokú végzettségéhez tartozó paraméterbecslés, azaz 1,025. Mivel egy hatás akkor pozitív, ha az esélyhányados logaritmusa pozitív, következtetésünk az, hogy az apa felsőfokú végzettsége pozitív hatást gyakorol a középfokú végzettség valószínűségére. Vegyünk egy másik következtetést is. Az esélyhányadosok használatával arra következtethetünk, hogy az egyén neme biztosan befolyásolja a középfokú végzettség megszerzését (β=1,011, a becslés szignifikáns), de nem biztos, hogy befolyásolja a felsőfokú végzettség megszerzését (β=0,225, a becslés nem szignifikáns).

Most vizsgáljuk meg az átlagos marginális hatások segítségével (a 2. tábla utolsó két oszlopa), helyesek-e ezek a következtetések. A becsült átlagos marginális hatások alapján látható, hogy az előbbi két következtetésünk nem helyes. Az apa felsőfokú végzettségének a hatása a középfokú végzettségre átlagosan nagy valószínűséggel –11 ± 10 százalék. Továbbá, az egyén neme is befolyásolja a felsőfokú végzettség megszerzésének az esélyét: a férfiak átlagosan 5,8 ± 4,9 százalékkal kisebb eséllyel szereznek felsőfokú végzettséget, mint a nők.

Miért nem helyes a paraméterbecsléseken, illetve az esélyhányadosokon alapuló értelmezés? Vizsgáljuk meg, miért nem pozitív a felsőfokú végzettségű apa hatása a középfokú végzettség megszerzésének a valószínűségére. Multinomiális logisztikus regressziónál ennek az eseménynek a bekövetkezési valószínűségét /6b/ adja meg. Milyen feltételek mellett értelmezhető pozitív hatásként egy pozitív koefficiens? Legyen β az apa felsőfokú végzettségének paraméterbecslése, $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$ pedig a többi változók és koefficienseik lineáris kombinációja. /6b/ alapján a felsőfokú végzettségű apa hatása a középfokú végzettség megszerzésére a következő:

$$\Delta P(\text{középfok}|\text{apa felsőfok}) = \exp(\beta_1+\boldsymbol{\gamma}_1\mathbf{z})[1+\exp(\beta_1+\boldsymbol{\gamma}_1\mathbf{z})+\exp(\beta_2+\boldsymbol{\gamma}_2\mathbf{z})]^{-1} - \\ - \exp(\boldsymbol{\gamma}_1\mathbf{z})[1+\exp(\boldsymbol{\gamma}_1\mathbf{z})+\exp(\boldsymbol{\gamma}_2\mathbf{z})]^{-1}.$$

Az algebrai műveletek elvégzése után belátható, hogy az említett hatás akkor pozitív, ha teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\exp(\boldsymbol{\gamma}_2\mathbf{z}) > [1-\exp(\beta_1)]/[\exp(\beta_1)-\exp(\beta_2)]. \qquad /7/$$

Mivel $1<\exp(\beta_1)$, az egyenlőtlenség akkor teljesül automatikusan, ha a jobb oldalon szereplő tört negatív, vagyis, ha $\exp(\beta_1)>\exp(\beta_2)$, azaz $\beta_1>\beta_2$. A probléma az, hogy semmilyen biztosíték sincs arra, hogy $\beta_1>\beta_2$. Tehát, hiába pozitív x (apa felsőfokú végzettsége) együtthatója a középfokú végzettség /6b/-ben, ebből nem következik szükségszerűen, hogy x pozitív hatást gyakorol a függő változó megfelelő kimenetére. Az x változó hatása biztos pozitív, ha x változó paraméterbecslése kisebb a felsőfok /6c/-ben.

Példánkban ez a feltétel nem teljesül. A felsőfokú végzettség paraméterbecslése a középfok egyenletben 1,025, a felsőfok egyenletben viszont ennél nagyobb, 2,752. Tehát az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés értéke [1–exp(1,025)]/[exp(1,025)– –exp(2,752)]=0,28. Az $\exp(\boldsymbol{\gamma}_2\mathbf{z})$ kifejezés értéke viszont megfigyelésről megfigyelésre változik. A kifejezés minimális értéke 0,123 (az összes változó értéke zérus), maximális értéke 13,07.[10] Tehát az $\exp(\boldsymbol{\gamma}_2\mathbf{z})<0,28$ egyenlőtlenség nem mindig áll fenn. Következésképp az sem biztos, hogy a pozitív paraméter pozitív hatást jelent. Ez az oka annak a megfigyelés-

[10] A maximális érték az exp(2,75+1,62+0,22–2,02) képlettel számolható, ahol 2,75 a legmagasabb paraméterbecslés az apa iskolázottságát kifejező dummy változóknál, 1,62 a legmagasabb paraméterbecslés a történeti periódusokat kifejező dummy változóknál, valamint 0,22 a nem paraméterbecslése, végül 2,02 a konstans paraméterbecslése. A minimális érték természetesen az exp(–2,02) kifejezésből adódik.

nek, hogy – az általános iskolai végzettségű apához viszonyítva – a felsőfokú végzettségű apák gyermekei kisebb valószínűséggel szereznek középfokú iskolai végzettséget.

Eredményünk általánosítható. Tegyük fel, hogy a függő változónak K+1 kimenete van, tehát K egyenletet becslünk. A pozitív β_i paraméter alapján csak akkor következtethetünk arra, hogy x pozitívan befolyásolja az i-edik kimenet bekövetkezésének a valószínűségét, ha

$$\Sigma\exp(\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})[\exp(\beta_i)-\exp(\beta_j)] > 1-\exp(\beta_i) \qquad (0<j<K, \quad j\neq i).$$

A tanulság az, hogy csak akkor lehetünk bizonyosak abban, hogy x hatása az i-edik kimenetre pozitív, ha x paraméterbecslése az i-edik egyenletben nagyobb, mint x paraméterbecslése bármely más egyenletben. Ha x becsléseit nem hasonlítjuk össze az összes egyenletben, akkor nem megalapozott az a következtetés, hogy egy pozitív paraméterbecslés pozitív hatással jár együtt.

Az esélyhányados kudarca multinomiális logisztikus regressziónál

Az előző elemzés ugyan érthetővé teszi, milyen feltételek mellett értelmezhető egy pozitív paraméter pozitív hatásként, azt azonban nem mutatja be, miért vezet kudarchoz multinomiális logisztikus regressziónál az esélyhányadosokon alapuló értelmezés. Legyen y a függő változó, amelynek (K+1) kategóriája van (y={0,1,...,K}). Érdeklődésünk középpontjában az a kérdés áll, milyen hatást gyakorol egy x változó az i-edik ($0<i\leq K$) esemény bekövetkezésének a valószínűségére. Mind a binomiális, mind a multinomiális logisztikus regressziónál a következő egyenlet írja le az i-edik kimenet valószínűsége és a paraméterbecslések közötti kapcsolatot:

$$P(y=i) = \exp(\beta_i x+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}\mathbf{z})[\exp(\beta_i x+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}\mathbf{z})+\Sigma\exp(\beta_j+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})]^{-1}, \qquad /8/$$

ahol $0\leq j\leq K$ és $i\neq j$. Ha a hatás nagyságának becslésekor a referenciakategóriához viszonyítunk, /8/ alapján kétfajta esélyhányados számolható ki.

$$\ln[P(y=i|x=1)/P(y=0|x=1)]-\ln[P(y=i|x=0)/P(y=0|x=0)] = \beta_i, \qquad /9a/$$

$$\ln[P(y=i|x=1)/P(y\neq i|x=1)]-\ln[P(y=i|x=0)/P(y\neq i|x=0)] = \\ =\beta_i\text{-}\ln[\Sigma\exp(\beta_j+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})-\Sigma\exp(\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})]. \qquad /9b/$$

/9a/ és /9b/ között két fontos különbség van. Az első az, hogy /9a/ alkalmasabb a paraméterbecslések egyszerű értelmezésére, hiszen itt az esélyhányados csak egy paraméterbecslés függvénye. Erre a célra /9b/ nem alkalmas, hiszen a gyakorlatban $\Sigma\exp(\beta_j+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})$ nem azonos feltétlenül a $\Sigma\exp(\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}\mathbf{z})$ mennyiséggel. A másik fontos különbség az, hogy csak /9b/ alapján lehet helyes következtetést levonni a hatás irányával kapcsolatban. Tegyük fel, hogy x y-ra gyakorolt hatása pozitív. Ekkor /1/ alapján $P(y=i|x=1)>P(y=i|x=0)$. /1/ azonban azt is maga után vonja, hogy $P(y\neq i|x=1)<P(y\neq i|x=0)$. Ezért ha x hatása pozitív, akkor $P(y=i|x=1)/P(y\neq i|x=1)$ nagyobb, mint $P(y=i|x=0)/P(y\neq i|x=0)$. Tehát x hatásának az irányát helyesen mutatja a /9b/ bal oldalán szereplő mennyiség (az esélyhányados logaritmusa). Ezzel szemben a hatás irányának a megállapítására /9a/ nem használható au-

tomatikusan. Ugyanis nem biztos, hogy a $P(y=i|x=1)>P(y=i|x=0)$ egyenlőtlenségből következik a $P(y=0|x=1)<P(y=0|x=0)$ egyenlőtlenség. A $P(y=i|x=1)>P(y=i|x=0)$ egyenlőtlenségből csak akkor következik az, hogy $P(y=0|x=1)<P(y=0|x=0)$, ha $\Sigma P(y=j|x=1)=\Sigma P(y=j|x=0)$ $(j\neq 0)$. A gyakorlatban ez a feltevés rendszerint hamis, ezért /9a/ nem alkalmas a hatás irányának a megállapítására.

Binomiális logisztikus regressziónál /9a/ és /9b/ ekvivalensek. Egyrészt az egyenletek bal oldalai ugyanazt a mennyiséget határozzák meg, mivel a függő változónak csak két kategóriája van, és így $P(y\neq i)=P(y=0)$. Másrészt az egyenletek jobb oldalai is azonosak, hiszen j egy értéket vehet fel, és erre az értékre definíció szerint $\beta_j=0$ és $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}=\mathbf{0}$. A binomiális logisztikus regressziónál számolt esélyhányadosok használata tehát egyszerű és a hatás irányára vonatkozó helyes értelmezést tesz lehetővé.

Multinomiális logisztikus regressziónál azonban /9a/ és /9b/ nem azonosak. Habár a $\beta_j=0$ és $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}=\mathbf{0}$ egyenlőségek automatikusan teljesülnek a regressziós modell referenciakategóriájára, j más értékeire ezek az egyenlőségek nem feltétlenül igazak, sőt, gyakorlati tapasztalatok alapján rendszerint hamisak. /9b/ tehát rendszerint nem azonos /9a/-val. Következésképpen, az eredmények egyszerű értelmezése nem garantálja a marginális hatás irányára vonatkozó következtetések helyességét.

Azok a kutatók, akik a paraméterbecslésekből számolt esélyhányadosokkal értelmezik a paramétereket, /9a/-t használják, de az ebben szereplő esélyhányados nem feltétlenül alkalmas a hatás irányának a megállapítására. Ugyanis nincs semmi garancia arra, hogy a $P(y=i|x=1)>P(y=i|x=0)$ egyenlőtlenségből következne a $P(y=0|x=1)<P(y=0|x=0)$ egyenlőtlenség. A probléma csak akkor kerülhető el, ha $\beta_j=0$ és $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{j}=\mathbf{0}$ egyenlőségek teljesülnének j mindegyik nemzérus – azaz, a referenciakategóriától eltérő – értékére. Ekkor ugyanis /9b/ redukálható lenne /9a/-ra, valamint teljesülne a helyes értelmezéshez szükséges $\Sigma P(y=j|x=1)=\Sigma P(y=j|x=0)$ egyenlőség. Ekkor viszont már nem multinomiális, hanem binomiális logisztikus regressziót használunk. Pontosabban: ahelyett, hogy egy multinomiális logisztikus regresszióval megbecsülnénk K egyenletet, külön-külön K egyenletet becsülnénk binomiális logisztikus regresszióval.

Vajon ugyanarra az eredményre vezet K számú egyenlet egymástól független becslése, mint a multinomiális logisztikus regresszió becslése? A válasz erre a kérdésre: nem. Az érvelés kedvéért képzeljük el, hogy a függő változó értékei a döntési alternatívákat, a független változók pedig a döntéshozó tulajdonságait írják le. Az egyenletek szeparált becslése azt jelentené, hogy az eredeti, $(K+1)$ alternatívából álló döntési problémát K darab, bináris döntési problémává redukáljuk (mindegyik bináris problémánál az egyik alternatíva az, amelynél $j=0$). A bináris döntési problémák csak akkor „reprezentálják" a $(K+1)$ alternatívából álló szimultán döntési problémát, ha teljesül az irreleváns alternatíváktól való függetlenség elve. Ez az elv azt a feltételezést mondja ki, hogy a (racionális) döntéshozó preferenciái függetlenek a döntési problémában meg nem jelenő alternatíváktól. Bizonyos alternatívák hasonlósága esetén azonban irreális az a feltevés, miszerint egy bináris döntés független lenne az irreleváns (a döntési problémában meg nem jelenő) alternatíváktól (*Debreu*; 1960). A többalternatívás, szimultán döntési probléma tehát nem darabolható fel feltétlenül bináris döntési problémák sorozatává.

Foglaljuk össze a multinomiális logisztikus regressziós paraméterek esélyhányadosokkal való értelmezésével kapcsolatos következtetésünket! Az esélyhányadosok használatával a kutatók a /9a/-t használják, és ezért – rendszerint tévesen – azt feltételezik, hogy a β_j=0 és $\boldsymbol{\gamma}_j$=**0** egyenlőségek teljesülnek *j* mindegyik értékére. Az esélyhányadossal történő értelmezés során tehát a kutató úgy tesz, mintha a β_j=0 és $\boldsymbol{\gamma}_j$=**0** egyenlőségek teljesülnének *j* mindegyik értékére. A feltevés lényegében nem más, mint az irreleváns alternatíváktól való függetlenség elve. Azaz, a kutató azt feltételezi, mintha a több lehetséges kimenetet tartalmazó probléma elemzése ekvivalens lenne a két kimenetet tartalmazó problémák egymástól elválasztott elemzéseivel, vagy azt, hogy a vizsgált kimenetek között nem találhatók egymáshoz hasonló kimenetek. Az irreleváns alternatíváktól való függetlenség elve azonban irreális. Ezért az esélyhányadosok használata helytelen gyakorlat.

Érdemes megjegyezni, hogy az ökonometriában klasszikusnak számít az a gondolat, miszerint az irreleváns alternatíváktól való függetlenség a multinomiális logisztikus regresszió kedvezőtlen tulajdonsága (*Amemiya*; 1981). A multinomiális logisztikus regresszióra annyiban jellemző a feltevés, hogy az egyes kimenetek bekövetkezését modellező multinomiális valószínűségek hányadosai függetlenek egy harmadik esemény bekövetkezési valószínűségétől (*Maddala*; 1983). Az esélyhányadosok az adott valószínűségek hányadosainak hányadosai, tehát az esélyhányadosok használata elkötelezi a kutatót az irreleváns alternatíváktól való függetlenség irreális feltevésére.[11]

GYAKORLATI TANÁCSOK

Az előző részben példákkal igazoltam, hogy tévesen ítélhetjük meg vizsgált változóink hatásának az irányát és nagyságát, ha kizárólag a nyers paraméterbecslésekre, illetve az esélyhányadosokra támaszkodunk. Azaz, alapvetően téves az a gyakorlat, hogy a feltételezett oksági kapcsolatok nagyságát és irányát egyszerűen leolvassuk a paraméterbecslésekről pontosan úgy, ahogy a lineáris regressziónál. A marginális hatások becslése azonban költségesebb: eléréséhez sok számolásra van szükség.

Tanulmányomban eddig a marginális hatás becslésének előnyeit ismertettem. A módszer széles körű használata azonban azt is megköveteli, hogy a marginális hatás becslése egyszerű, költségmentes legyen. A marginális hatások kiszámítása jelenleg költséges: a gyakran használt statisztikai programcsomagok (például az SPSS) nem tartalmaznak olyan parancsokat, amelyek automatikussá tennék a bonyolult számításokat. További akadály az, hogy a kutatók egy része nem mindig közli azokat az információkat (paraméterbecslések, standard hibák), amelyek birtokában a marginális hatások elvileg kiszámíthatók. Ezért most két olyan gyakorlatot szeretnék a kutatók figyelmébe ajánlani, amelyek nem követelnek részletes számításokat, mégis nagy előnyökkel járnak.

A lineáris valószínűségi modell. Meglepő módon a lineáris regresszió használata segíthet a kutatóknak abban, hogy paraméterbecslések vagy esélyhányadosok helyett a marginális hatás terminusában értelmezzék eredményeiket. A szakirodalomban legtöbbször hibának tüntetik fel azt a modellezési gyakorlatot, amely lineáris, nem pedig a logisztikus regressziós modellt alkalmazza kategorikus függő változók elemzésére. Azonban a logisztikus regressziós paramétereket is lehet a varianciával, pontosabban annak reciprokával, súlyozott

[11] Az ökonometriai irodalomban elfogadott az az álláspont, hogy az irreleváns alternatíváktól való függetlenség feltételezése elkerülhető a multinomiális probit modell használatával. A multinomiális probit modell gyakorlati hasznát azonban korlátozza az a tény, hogy becslése jelentős számítási nehézséggel – többdimenziós integrálok kiszámításával – jár együtt.

legkisebb négyzetek módszerével elemezni (*Amemiya*; 1981). A variancia reciprokával súlyozott legkisebb négyzetek módszerével becsült lineáris valószínűségi modell ugyancsak lehetővé teszi, hogy a jól ismert lineáris regresszióval viszonylag jó becsléseket adjunk a binomiális logisztikus regressziós paraméterekhez tartozó marginális hatásokról. A bármely szoftverrel könnyen megvalósítható becslési eljárás a következő három lépésből áll.

1. Becsüljük meg a vizsgálni kívánt modellt szokásos lineáris regresszióval (a közönséges legkisebb négyzetek módszerével).

2. A becslés után számoljuk ki a $p(1–p)/n$ változót, ahol p a paraméterek és a változók lineáris kombinációja (azaz, a függő változó várható értéke a becslés után), n pedig a regressziós becslés során felhasznált megfigyelések száma.

3. Becsüljünk meg egy olyan lineáris regressziót, ahol a megfigyeléseket a 2. lépésben kiszámolt változó reciprokával súlyozzuk.

Ez az eljárás kiküszöböli a becslés hatékonyságával összefüggő problémát: ha kategorikus függő változót lineáris regresszióval magyarázunk, akkor a hibatag heteroszkedasztikus, és emiatt a becsült standard hibák torzítottak. A módszer azonban nem küszöböli ki azt a hibaforrást, miszerint az előre jelzett valószínűségek kívül eshetnek az értelemmel bíró [0,1] intervallumon. Ezért a 3. lépés után érdemes ellenőrizni az értelmetlen előrejelzések számát. A módszer hátránya természetesen az, hogy csak közelítőleg érvényes eredményeket ad. Ezért nem alkalmas eltérő hatások pontos összehasonlítására. Az sem egyértelmű továbbá, hogy van-e kapcsolat, és ez milyen az értelmetlen előrejelzések és az eredmények pontossága között. A 3. tábla a lineáris valószínűségi modell alkalmazhatóságát és korlátait illusztrálja a kockázatviselésre vonatkozó példával. Az olvasó közvetlenül összehasonlíthatja a lineáris valószínűségi modellből származó becsléseket a logisztikus regresszió alapján számolt marginális hatásokkal.

3. tábla

A szerencsejáték választását befolyásoló tényezők három különböző tétnél

Változó	Játék1 (Tét: 1 ezer forint)		Játék2 (Tét: 100 ezer forint)		Játék3 (Tét: 1000 ezer forint)	
	$100 \cdot \beta$	ΔP	$100 \cdot \beta$	ΔP	$100 \cdot \beta$	ΔP
Log_{10}(Családi jövedelem)	15,3 (4,4)**	18,9 (4,6)**	6,3 (2,0)**	6,7 (3,0)*	11,6 (1,8)**	-3,2 (2,1)
Életkor[a)]	-4,5 (0,6)**	-4,9 (0,6)**	-0,7 (0,3)**	-1,1 (0,4)**	0,0 (0,2)	0,4 (0,3)
Iskolai végzettség[b)]	4,6 (1,5)**	3,8 (1,4)**	1,3 (0,7)	2,1 (0,9)*	-2,4 (0,5)**	-0,7 (0,7)
Nem (1 – férfi, 0 – nő)	4,5 (1,9)*	4,0 (1,9)*	1,9 (0,8)*	2,7 (1,3)*	2,0 (0,7)**	-0,5 (0,9)
Önálló foglalkozású[c)]	-1,4 (4,1)	-2,0 (3,9)	4,6 (3,5)	7,8 (2,8)**	-2,3 (1,5)	0,2 (1,8)
Kockáztatott 1. játékban[c)]			41,4 (2,2)**	39,1 (1,9)**	9,4 (1,0)**	1,7 (1,4)
Kockáztatott 2. játékban[c)]					25,3 (3,8)**	31,5 (4,4)**
Konstans	-32,4 (19,9)		-26,9 (8,5)**		-50,6 (8,6)**	
Esetszám	2308		1845		2062	

R^2	0,06		0,20		0,12	
Értelmetlen előrejelzések száma	0		367		771	

* p<0,05;
** p<0,01.
[a] 6 kategóriából álló változó.
[b] 3 kategóriából álló változó.
[c] 1 ha igen; különben 0.
Megjegyzés. A varianciával súlyozott legkisebb négyzetek módszerével becsült paraméterek százszorosa (100·β) és a logisztikus regressziós paraméterbecslések alapján becsült marginális hatások (ΔP) százalékban kifejezve (standard hibák zárójelben).
Forrás: A TÁRKI 1996-os és 1997-es Omnibusz felvételei (*Szántó–Tóth*; 1999).

Regressziós eredmények publikálása. Tanulmányom azt bizonyítja, hogy marginális hatások becslése nélkül nem lehet biztos oksági következtetéseket levonni. Mivel a marginális hatás nemcsak a paraméterbecslések, hanem a mintabeli adatok függvénye is, a marginális hatás megítéléséhez szükség van a változók mintabeli eloszlásainak az ismeretére. Ekkor ugyanis a publikált regressziós eredmények értelmezhetők a rögzítés és az átlagolás kombinált módszerével. A publikált eredmények értelmezésére alkalmas kombinált módszer a következő. Először – a rögzítés módszerét figyelembe véve – létre kell hozni egy 2^K megfigyelésből álló, K változót tartalmazó adatbázist (ahol K a dummy változók száma). Ez az adatbázis a dummy változók által definiált összes lehetséges típust tartalmazza. Ezután – a rögzítés módszerét követve – az adatbázishoz hozzáadunk annyi új változót, ahány folytonos változónk van. Ezek az új változók az egyes folytonos magyarázó változók átlagait vagy valamilyen kitüntetett értékét tartalmazzák. Ezen az adatbázison /5/ és /6/ segítségével megbecsülhetők a marginális hatások.[12] A tanulság az, hogy nem felülvizsgálható az a kutatási beszámoló, amely nem közli a regresszióba bevont változók mintabeli átlagait, valamint a regressziós becslések standard hibáit.

*

Tanulmányom azt a tézist fejtette ki, hogy logisztikus regressziós eredmények értelmezésére jobban alkalmasabb a marginális hatás, mint az esélyhányados. A tézis melletti első érv az, hogy a marginális hatás értéke jobban értelmezhető, mint az esélyhányados. Itt egyrészt arról van szó, hogy a marginális hatás mint mérőszám lehetséges értékei korlátosak, míg az esélyhányados lehetséges értékei nem. Másrészt a marginális hatás egy olyan koncepción – az okság probabilisztikus elméletén – alapul, amely világos keretet ad a statisztikai bizonyítékok oksági értelmezéséhez. A második érv, amelyet a binomiális logisztikus regressziónál ismertettem az, hogy az esélyhányados hamis képet festhet az oksági kapcsolat nagyságáról. Ez különösen akkor probléma, ha a kutatónak van elméleti hipotézise különböző hatások viszonylagos nagyságáról. A harmadik érv pedig, amelyet a multinomiális regressziónál mutattam be az, hogy az esélyhányados nem mindig fejezi ki helyesen a feltételezett oksági kapcsolat irányát. A példák azt mutatták, hogy a nyers paraméterbecslésekből számolt esélyhányadosok multinomiális logisztikus reg-

[12] Természetesen ez az adatbázis nem reprodukálja az eredetit, még akkor sem, ha az egyes megfigyeléseket súlyozzuk. Az alapvető probléma az, hogy kizárólag a leíró statisztikák alapján lehetetlen reprodukálni azokat a súlyokat, amelyek segítségével az eredeti adatbázis reprezentálható. Mégis, tapasztalataim alapján, az itt ismertetett egyszerű módszerrel azokat a marginális hatásokat kapjuk meg, melyeket akkor kapnánk, ha az elemzést végző kutató rendelkezésünkre bocsátotta volna az adatait.

ressziós modellekben pozitív oksági kapcsolatot mutathatnak ott, ahol az átlagos marginális hatás alapján nincs pozitív oksági összefüggés.

Végül egy megjegyzés a tanulmány korlátairól. Nem vizsgáltam alaposan azt a kérdést, hogy az átlagos marginális hatás vajon kedvezőbb statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik-e, mint az esélyhányados, valamint azt a kérdést, hogy a marginális hatás becslésének két módszere – a rögzítés és az átlagolás módszere – közül melyik rendelkezik kedvezőbb statisztikai tulajdonságokkal. Ez a kérdés azért lehet releváns, mert az esélyhányados használata melletti fő érv statisztikai természetű: az, hogy az esélyhányados értéke független a minta bizonyos tulajdonságaitól (*Bishop–Fienberg–Holland*; 1975, *Rudas*; 1998). A statisztikai tulajdonságok vizsgálata tovább finomíthatná az esélyhányados és a marginális hatás összehasonlítását, valamint a marginális hatás becslési módszerei közötti választás szempontjait. A tanulmányban szereplő példákban a becsült marginális hatásokat az átlagolás módszerével számoltam ki. A döntés mellett csak az szólt, hogy a rögzítés módszerét körülményes lenne használni, ha a független változók között sok a dummy változó. Minthogy a döntésem nem vette figyelembe ezt a statisztikai szempontot, az egyes példákban a marginális hatásra vonatkozó becslési eredmények és az ezekből levont tartalmi következtetések nem tekinthetők véglegesnek.

FÜGGELÉK

MARGINÁLIS HATÁSOK VARIANCIÁJÁNAK BECSLÉSE

Legyenek **b** és **β** rendre a paraméterbecslések, illetve a valós paraméterek vektorai. Legyen **m** a marginális hatások vektora, **G** a marginális hatások paraméterek szerint vett parciális deriváltjait tartalmazó mátrix. Jelölje **V**(•) a kovariancia mátrixot!

A marginális hatások varianciájának becslése a delta módszert használja. A Taylor-módszer alapján

$$\mathbf{m}(\mathbf{b}) \approx \mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{G}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \qquad /F1/$$

Ha $\mathbf{m}(\mathbf{bx})-\mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{x})$ különbséget behelyettesítjük a variancia definíciójába, akkor a marginális hatások varianciájára a következő kifejezést kapjuk:

$$\mathbf{V}[\mathbf{m}(\mathbf{bx})] \approx \mathbf{G}\mathbf{V}(\mathbf{b})\mathbf{G}^{T} \qquad /F2/$$

A regressziós becslés után a paraméterek kovariancia mátrixa, **V**(**b**), rendelkezésünkre áll. A marginális hatások varianciájának becsléséhez a **G** mátrix egyes elemeit kell kiszámítani. **G** *i*-edik sora és *j*-edik oszlopa az *i*-edik marginális hatás *j*-edik paraméterbecslés, b_j, szerint vett parciális deriváltját tartalmazza. Dummy, illetve folytonos változók esetén a parciális derivált:

$$\partial m_i/\partial b_j = N^{-1}\Sigma[\mathrm{f}(\mathbf{bx}|x_i{=}1)-(1-\delta)\mathrm{f}(\mathbf{bx}|x_i{=}0)]x_j \qquad /F3/$$

$$\partial \mathrm{m_i}/\partial \mathrm{b_j} = N^{-1}\Sigma[\delta\mathrm{f}(\mathbf{bx})+b_i\partial\mathrm{f}(\mathbf{bx})/\partial\mathbf{bx}]x_j \qquad /F4/$$

Mindkét képletben δ=1, ha *i*=*j*, δ=0 ha *i*≠*j*. Belátható, hogy lineáris regresszió esetén a **G** mátrix az egységmátrix.

IRODALOM

AMEMIYA, T. (1981): Qualitative response models: A survey. *Journal of Economic Literature,* 19. évf. 483–536. old.

BISHOP, Y. M. M. – FIENBERG, S. E. – HOLLAND, P. W. (1975): *Discrete multivariate analysis. Theory and practice*. MIT Press. Cambridge (MA).

BLOSSFELD, H.-P. – ROHWER, G. (1995): *Techniques of event history modeling: New approaches to causal analysis*. Mahweh. Erlbaum.

DEBREU, G. (1960): Review of „invidual choice behaviour" by R. Luce. *American Economic Review,* 50. évf. 186–188. old.

GANZEBOOM, H. B.G. – TREIMAN, D. – ULTEE, W. C. (1991): Comparative intergenerational stratification research: three generations and beyond. *Annual Review of Sociology,* 17. évf. 277–302. old.

GOLDTHORPE, J. H. (2001): Causation, statistics, and sociology. *European Sociological Review,* 17. évf. 1–20. old.

GREENE, W. (2000): *Econometric analysis.* Prentice Hall. New Jersey.

HENDRICKX, J. – GANZEBOOM, H. B. G. (1998): Occupational status attainment in the Netherlands, 1920–1990: A multinomial logistic analysis. *European Sociological Review,* 14. évf. 387–403. old.

KING, G. – TOMZ, M. – WITTENBERG, J. (2000): Making the most of statistical analyses: Improving intepretation and presentation. *Americal Journal of Political Science,* 44. évf. 341–355. old.

LIEBERSON, S. (1985): *Making it count. The improvement of social research and theory*. University of California Press. Berkely.

LONG, J. S. (1997): *Regression models for categorical and limited dependent variables*. Sage Publications. Thousand Oaks, CA.

MULAIK, S. A. – RAJU, N. S. – HARSHMAN, R. A. (1997): There is a time and a place for significance testing. In: *Harlow, L. L. – Mulaik, S. A. – Steiger, J. H.* (szerk.): *What if there were no significance tests*. Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ. 65–115. old.

PÖTTER, U. – BLOSSFELD, H.-P. (2001): Causal inference from series of events. *European Sociological Review,* 17. évf. 21–32. old.

RUDAS, T. (1998): *Odds ratios in the analysis of contingency tables*. Sage. Thousand Oaks, CA.

SOBEL, M. E. (1998): Causal inference in statistical models of the process of socioeconomic achievement. *Sociological Methods and Research,* 27. évf. 318–348. old.

SUPPES, P. (1970): *A probabilistic theory of causality*. North Holland. Amsterdam.

SZÁNTÓ Z. – TÓTH I. GY. (1999): Dupla vagy semmi, avagy kockáztassuk-e a talált pénzt? *Szociológiai Szemle,* 9. évf. 1. sz. 31–68. old.

WINSHIP, C. – MORGAN, S. L. (1999): The estimation of causal effects from observational data. *Annual Review of Sociology,* 25. évf. 659–707. old.

SUMMARY

The argument developed in this paper is that the proper interpretation of logistic regression coefficients requires the estimation of marginal effects rather than the use of raw coefficients or the calculation of odds ratios. The fundamental difference between odds ratios and marginal effects is that the former depends only on the parameter estimate of interest while the latter on other coefficients and the values of all variables. In the first part the paper gives the description of the concept and the estimation methods of marginal effects. Then, presenting empirical examples, it is shown that researchers relying on the odds ratio might draw misleading conclusions about the size of the assumed causal effect in binomial logistic regression, and the direction of the assumed causal effect in multinomial logistic regression. Finally, some recommendations concerning the publication of logistic regression results are formulated.